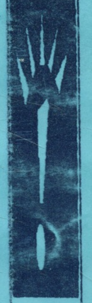
مبادئ التحليل الرياضي



د/ مصطفى أحمد الجندى

أستاذ الرياضيات

بكلية الهندسة جامعة الاسكندرية

مبادئ التحليل الرياضي

$\square \; \Pi \; \square \Leftrightarrow \square \; \Pi$

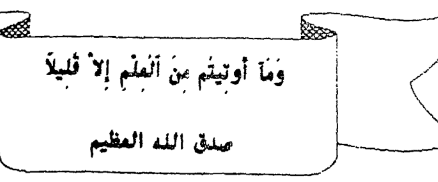


د/ مصطفى أحمد الجندى

أستاذ الرياضيات

بكلية الهندسة جامعة الاسكندرية

بسم الله الرحمن الرحيم



مقدمــــــة

يعزى كثير من التقدم المذهل فى العلوم والتكنولوجيا فى عصرنا الحديث لتطور
باضيات.

صمم هذا الكتاب كمرجع فى التحليل الرياضى بلغة الضاد بهدف تغطية بعض القصور
' يكتب بها من لغة علمية وإثراء مكتبتها فى مجال يقوم مقام العمود الفقرى للعلوم التطبيقية.

عرضت أبواب الكتاب بصيغة وسط بين النظرية والتطبيق مع تركيز فى الأمثلة
ضيحية لمعالجة المشاكل التى يمكن أن تتناولها موضوعات الكتاب وبهدف إنماء المهارات
ذرات الرياضية لدى الطالب، زود الكتاب فى نهاية كل جزئية من جزيئات الكتاب بتمارين
صة بهذه الجزئية – كما زود بتمارين عامة عقب كل باب.

وكما يشكر المؤلف دار لؤى *L. O. U.* لجهدها فى إخراج هذا الكتاب إلى النور
منى لها دوام التوفيق.

آمل أن يكون الكتاب مفيدا لقارئه

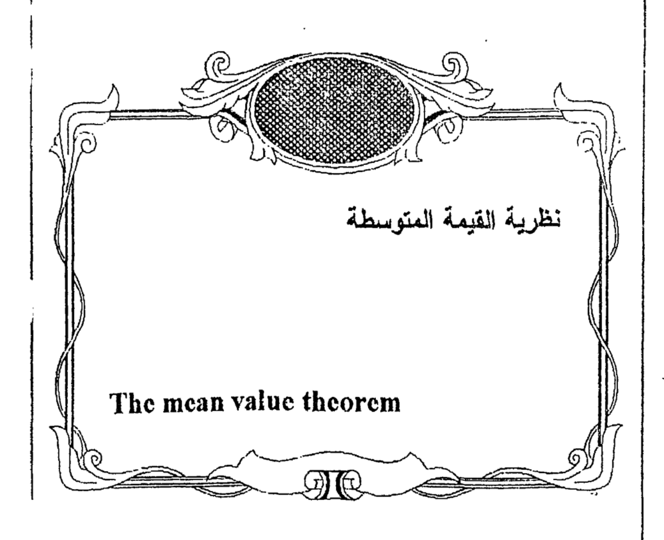
والله من وراء القصد

المؤلف

مصطفى أحمد الجندى

الفهرس Contents

الموضوع	الصفحة


نظرية القيمة المتوسطة
The mean value theorem

١-٢ نظرية القيمة المتوسطة (The mean value theorem)

نمهد أولا لنظرية القيمة المتوسطة بالنتائج التالية عن الدوال المتصلة

نظرية بولزانو – كوشى الأولى: إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى فترة ما $[a, b]$ ولها قيم مختلفة الأشارات عند نهايتى الفترة فانه توجد نقطة c داخل الفترة (a, b) بحيث $f(c) = 0$

(b,f(b))
c
x
(a,f(a))

هذه الخاصية الهامة للدوال المتصلة تنص على انه اذا تغيرت أشارة دالة $f(x)$ بين نقطتين a, b فانه يوجد بينهما جذر للمعادلة $f(x) = 0$.

يمكن تعميم النظرية السابقة لنحصل على نظرية بولزانو – كوشى الثانية.

نظرية: اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة فى فترة اختيارية L وكانت $f(a) = A$ بينما $f(b) = B$ حيث $a, b, \in L$ من ثم فانه لأى عدد $A < C < B$ توجد نقطة $x = c$ بين a, b بحيث $f(c) = C$.

ان معرفة مشتقة دالـة قد يمكننـا مـن معرفـة سـلوك الدالـة. مثـلا، وجـود مشـتقة $f'(x)$ لدالـة $f(x)$ فـي الفـترة $a \le x \le b$ يعنـي أن الدالة $f(x)$ متصلة عند كل نقطة من نقط الفترة (بينما إتصـال دالـة عند نقطة لا يعني بالضرورة وجود مشتقة لها عند هذه النقطة). مع أن للمشتقة الأولى دافـع ومحراك هندسـي بشـكل أساسـي (إذ هـي تعنـي ميـل المماس لمنحنى) إلا أن تعريفها لايرتبط بـأى تمثيل هندسـى. النتـائج التاليـة تعطـي إرتباطا بين سلوك دالة ومشتقتها الأولى.

نظريـة تمهيديـة: (Lemma) نفـرض أن للدالـة $f(x)$ مشـتقة محدودة عند نقطة x_0.إذا كـانت $f'(x_0) > 0$ $[f'(x_0) < 0]$ فـإنه لقيم x القـريبة بشـكل كـاف مـن x_0 مـن جـهة اليـمين تكـون $f(x) > f(x_0)$ $[f(x) < f(x_0)]$ ولقيم x القريبة بشـكل كـاف من x_0 من جهة اليسار تكون $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$

هـذه الأنظـورة تنص على تزايـد [تنـاقص] $f(x)$ فـي جـوار لنقطة x_0 إذا كانت $f'(x_0) > 0$ $[f'(x) < 0]$

نظـرية فرما (fermat's Theorem) نفـرض أن دالـة $f(x)$ معرفة علـى فتـرة I وأن لهـا قيمـة عظـمى (صـغرى) عند نقطـة داخليـة $x=c$ فـى هـذه الفترة إذا كـانت للدالـة مشـتقة $f'(c)$ مـن الجهتين منتهية عند النقطة c فإنه من الضرورى أن تنعدم هذه المشتقة.

إثبات نظرية فرمات يتضح مباشرة من النظرية التمهيديـة السـابقة. يجب أن نلاحظ أن النظرية قد لاتتحقق إذا كانت النقطـة c إحدى النقطتين الحديتين

a c b x a b

النظرية التالية تمثل تطبيقا ممتعا لنظرية فرما.

نظرية داربو (G. Darboux): إذا كان للدالة $f(x)$ مشتقة منتهية عند جميع نقط الفترة $[a , b]$ فإن المشتقة $f'(x)$ تأخذ جميع القيم الواقعة بين $f'(a)$, $f'(b)$

فى هذه النظرية $f'(a)$ تعنى المشتقة من جهة اليمين بينما $f'(b)$ تعنى المشتقة من جهة اليسار. نظرية داربو تنهج مسارا مشابها لنظرية بولزانو – كوشى الثانية ولكنها ليست مستنتجة منها – حيث أن مشتقة دالة متصلة ليست بالضرورة متصلة.

النظرية التالية مقدمة ضرورية لنظرية القيمة المتوسطة التى تلعب دورا هاما فى حساب التفاضل.

نظرية رول (M. Rolle): نفرض أن الدالة $f(x)$:

١ – متصلة فى فترة مغلقة $[a , b]$.

٢ – لها مشتقة منتهية $f'(x)$ فى الفترة المفتوحة (a , b) على الأقل.

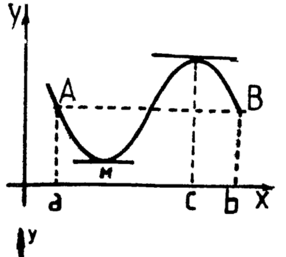
٣ – لها قيم متساوية عند حدى الفترة .

من ثم توجد نقطة واحدة على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث $f'(c) = 0$

الإثبات: حيث أن $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $[a , b]$ بالتالى فهى تأخذ فى هذه الفترة حدها الأعلى M أو حدها الأصغر m (أو كلاهما).

فى حالة $M = m$ نحصل على $f(x) = m = M$ وبالتالى $f'(x) = 0.$ لجميع قيم x

فى الحالة $M > m$ وحيث أن $f(a) = f(b)$ ، من الضرورى أن تأخذ الدالة إحدى نهايتها فى نقطة داخلية فى الفترة $[a , b]$. بتطبيق نظرية فرما توجد نقطة c بحيث $f'(c) = 0$



تنص النظرية هندسيا على أنه إذا تساوت قيم دالة متصلة ومشتقاتها الأولى معرفة بين نقطتين فإنه توجد بينهما نقطة يكون المماس عندها موازيا محور x.

تنتفى صحة نظرية رول إذا إكتفينا بالشرطين الأول والثالث كما يوضح المثال بالشكل إذ يعرض دالة غير قابلة للإشتقاق عند نقطة d.

نأتى الآن لتعميم نظرية رول وهى النظرية الهامة والأساسية فى حساب التفاضل. فى هذه النظرية كما فى نظرية رول نعرض شروطا لسنا بصدد إستقلاليتها بقدر التركيز على عرضها.

نظرية (لاجرانج أو نظرية القيمة المتوسطة)

The Mean value theorem

نفرض أن الدالة $f(x)$:

١ – متصلة فى الفترة $[a , b]$

٢ – لها مشتقة منتهية $f'(x)$ فى الفترة $(a\ ,\ b)$ على الأقل من ثم توجد نقطة c فى الفترة $(a\ ,\ b)$ بحيث:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

الإثبات: الدالة المساعدة

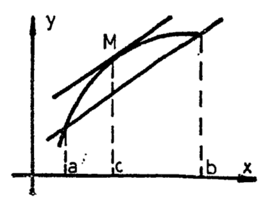
$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ (x - a)$$

تحقق شروط نظرية رول فى الفترة $[a\ ,\ b]$ ، من ثم توجد نقطة c فى الفترة (a,b) بحيث $g'(c) = 0$

$$i.e.,\quad 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

بالتالى تتحقق النظرية.

هندسيا تنص نظرية لاجرانج على أنـه توجد نقطـة $M(c,\ f(c))$ على المنحنى $y = f(x)$ يكـون الممـاس عندها موازيـا للوتـر الواصـل بيـن النقطتيـن الحديتين .



يمكن كتابة نظرية القيمة المتوسطة كالآتى:

$$f(b) - f(a) = f'(c)\ (b - a)$$

من المناسب كذلك كتابتها أيضا كالآتى:

$$f(b) = f(a) + (b - a)\ f'(a + \theta\ (b - a))$$

حيث $c = a + \theta (b - a)$ ، $0 < \theta < 1$

بوضع $b = a + h$ تؤل الصيغة السابقة إلى

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a + \theta h)$$

بوضع x بدلا من a ووضع Δx بدلا من h في الصيغة السابقة نحصل على صيغة التغيرات المنتهية.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$$

$$or\ \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x).$$

أخيرا نأتى لصيغة كوشى وهى تعميم لنظرية القيمة المتوسطة.

نظرية: نفرض أن الدالتين $f(x)$, $g(x)$

١ – متصلتان فى الفترة $[a , b]$ بحيث $g(b) \neq g(a)$

٢ – لهما مشتقتان محدودتان $f'(x)$, $g'(x)$ فى الفترة (a , b) على الأقل.

٣ – لا تنعدم كل من $f'(x)$, $g'(x)$ عند نفس النقطة.

من ثم يوجد عدد c فى الفترة (a , b) بحيث:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

الإثبات: الدالة المساعدة

$$h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

تحقق شروط نظرية رول، من ثم يوجد عدد $c \in (a , b)$ بحيث

$$h'(c)=0=\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}=f'(c)\,(g(a)-g(b))-g'(c)\,(f(a)-f(b))$$

$$i.e.,\qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

تتضح أهمية عدم إنعدام كل من g' , f' عند نفس النقطة من المثال الآتى: نفرض

$$a=-1,\ b=1,\ f=x^2\ ,\ g=x^3$$

من ثم

$$f(b)-f(a)=0\ ,\ g(b)-g(a)=2$$

ولايمكــن أن تتحــقق النتيجــة إلا إذا كــان $f'(c)=0$ أى عنـد $c=0$ حيث عندها أيضا $g'(c)=0$ وتصبح الصيغة بلا معنى.

مثال (١): أوجد قيمة c فى نظرية القيمة المتوسطة حيث

$$f(x)=x(x-1)\ (x-2)\qquad a=0\quad ,\quad b=\frac{1}{2}$$

الحل: نوجد أولا

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{3/8}{1/2}=\frac{3}{4}$$

نوجد $f'(x)$

$$f'(x)=3x^2-6x+2$$

لإيجاد النقط x حيث $f'(x)=\frac{3}{4}$ نحل المعادلة

$$3x^2-6x+2=3/4\Rightarrow x=(6\pm\sqrt{21})/6$$

من ثم فإن $c \pm (6-\sqrt{21})/6$

$i.e., f(a)=f(b)$

٢-١ تطبيقات نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل

لنظرية القيمة المتوسطة تطبيقات عدة سوف تتضح أهميتها خلال دراستنا وسنعرض الآن لواحد من هذه التطبيقات.

الصيغ غير المعينة (Indeterminate forms)

عند دراسة نهايات بعض الدوال على الهيئة $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ قد يؤول كل من البسط والمقام إلى الصفر أو مالانهاية وبذا نحصل على الصور $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ والمسماه كميات غير معينة.

نظرية: نفرض أن $f(a)=g(a)=0$ بينما $f'(a), g'(a)$ ليما وجود والنسبة بينهما منتهية من ثم

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

الإثبات: يتحقق الإثبات مباشرة من تعريف المشتقة

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))/(x-a)}{(g(x)-g(a))/(x-a)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{f'(a+\theta(x-a))}{g'(a+\theta(x-a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

تسمى النظرية السابقة قاعدة لوبيتال **l' Hospital's rule**

مثال (٢):

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)}$$

الحل: التعويض المباشر يؤدى إلى الصيغة $\frac{0}{0}$ ، من ثم

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{ae^{ax} + ae^{-ax}}{1/1+x} = 2a$$

الصورة الغير معينة $\frac{\infty}{\infty}$:

نظرية: نفرض أن الدالتين $f(x)$, $g(x)$:

١ – معرفتان فى الفترة $(a , b]$

٢ – تؤولان إلى مالانهاية عندما تؤل x إلى a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

٣ – لهما مشتقتان $f'(x)$, $g'(x)$ منتهيتان فى الفترة $(a , b]$ بالإضافة أن $g'(x) \neq 0$.

٤ – النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ معرفة وتساوى K

من ثم

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

الإثبات: سندرس فقط الحالة التى فيها K كمية منتهية. الحالة التى فيها K غير منتهية تعالج بصورة مطابقة.

لكل عدد إختيارى $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث لكل

$$a < x < a + \delta = x_0$$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

باستخدام نظرية كوشى على الفترة $[x , x_0]$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad x < c < x_0$$

بالتالى

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

من المتطابقة

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x_0)} + \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right] \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right]$$

نحصل على

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| \le \left| \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right|$$

حيث أن

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} = 0 \quad (because \lim_{x \to a} g(x) = \infty)$$

من ثم يمكن إيجاد $\eta > 0$ (يمكن إختيار $\eta < \delta$) بحيث

$$\left| \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

لقيم $a < x < a + \eta$. بذا لقيم x هذه يصبح

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \varepsilon$$

ويكتمل الأثبات

إثبات آخر: نختار قيمتين x ، x_0 بحيث $a < x < x_0$. من صيغة كوشى يوجد ξ بين x ، x_0 بحيث

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ولكن

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

أى أن

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \; \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$$

حيث أن المقدار

$$\frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$$

يقترب من الوحدة بإقتراب x من a

من ثم

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال (٣) : التعويض المباشر عند إيجاد $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x}$ يعطى الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ من ثم

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + 1/x}{1 + \ln x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

صور أخرى من المقادير غير المعينة

الصور غير المعينة 0^0 ، ∞^0 ، 1^∞ ، $\infty - \infty$ ، $\infty . 0$ يمكن أن تطبق عليها قاعدة لوبيتال بشرط كتابتها على إحدى الصورتين $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$

مثال (٤) التعويض المباشر فى النهاية $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)$ يعطى الصورة غير المعينة $\infty . 0$ والتى يمكن تحويلها إلى الصورة $\frac{0}{0}$ كالآتى:

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x^2 e^{1/x}}{-1/x^2} = 1$$

الصور غير معينة 0^0 ، ∞^0 ، 1^∞ تعالج كالآتى:

نعلم أن $z = b^{\log_b z}$ ، من ثم

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \quad \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$$

أى أنه لإيجاد $\lim f(x)^{g(x)}$ نوجد أولا $\lim g(x)\, \ln f(x)$

ولتكن c وعليه تكون النهاية المطلوبة مساوية e^c

مثال (٥) لإيجاد $\lim_{x\to 1} x^{1/1-x}$ نوجد أولا

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} \ln x = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-1} = -1$$

وتكون النهاية المطلوب

$$\lim_{x\to 1} x^{1/1-x} = e^{-1}$$

٣-٢ نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

لنظرية القيمة المتوسطة للتفاضل نظير فى التكامل نمهد لها بالخواص التالية لدالة $f(x)$ متصلة فى فترة $[a , b]$.

خاصية ١: إذا كانت $f(x) \geq 0$ لقيم $a \leq x \leq b$ فإن $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

نحتاج للتحقق من هذه الخاصية أن نلاحظ المجموع الاصغر S (الناتج من تعريف التكامل) $s = \Sigma\, m_i\, \Delta x_i$ حيث m_i الحد الأصغر للدالة $f(x)$ فى فترة التقسيم Δx_i، لايمكن أن يساوى الصفر مالم يكن قياس الدالة $f(x)$ مساويا للصفر.

خاصية ٢: إذا كانت $k \leq f(x) \leq K$ فإن

$$k(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq K(b - a)$$

تتحقق هذه الخاصية مباشرة بتطبيق الخاصية السابقة على الدوال

$$f(x) - k \quad , \quad K - f(x)$$

٣-١ نظرية (القيمة المتوسطة للتكامل):

لأى دالة متصلة $f(x)$ فى فترة $[a , b]$ يوجد عدد $\xi \in (a , b)$ بحيث .

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\, f(\xi)$$

الإثبات: إعتمادا على الخاصية ٢ وإختيار k مساويا لأصغر قيمة للدالة $f(x)$ وإختيار K أكبر قيمة للدالة فى الفترة $[a , b]$ يصبح التكامل مساويا $(b - a)\, \eta$ حيث تقع η بين العددين k , K. حيث أن $f(x)$ دالة

متصلة وجب وجود عدد ξ بحيث $\eta = f(\xi)$. بفرض ان $F(x)$ هى ناتج تكامل $f(x)$ ، أمكن أن نكتب

$$F(b) - F(a) = (b-a)\, F'(\xi)$$

أى أن

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\, f(\xi).$$

١-٣ نظرية (القيمة المتوسطة العامة للتكامل):

إذا كانت $\phi(x)$ غير سالبة وكانت k أصغر قيمة للدالة $f(x)$ بينما K أكبر قيمة لها فى الفترة $[a, b]$ فإن

$$k\int_a^b \phi(x)\, dx \le \int_a^b f(x)\,\phi(x)\, dx \le K\int_a^b \phi(x)\, dx,$$

أيضا

$$\int_a^b f(x)\,\phi(x)\, dx = f(\xi)\int_a^b \phi(x)\, dx$$

حيث تقع ξ بين a , b

يرتكز إثبات هذه النظرية على تطبيق الخاصية ١ على التكاملين

$$\int_a^b \{f(x) - k\}\phi(x)\, dx \quad , \quad \int_a^b \{K - f(x)\}\phi(x)\, dx$$

تمارين

١ – أوجد قيم النهايات الآتية:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$

(2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \cos x - e^x}{\ln(1+x^2)}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^3 \sin x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \tan x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - 3x - e^{-x}}{x^2}$

(7) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3-3^x}{5-5^x}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - e^x - e^{-x}}{\sin^2 x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{nx} - x}{1 - \cos nx}$

(10) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$

(11) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\pi/2 - \tan^{-1} x}{\frac{1}{2} \ln(x-1)/(x+1)}$

(12) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

(13) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) x$

(14) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/1-x}$

(15) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x\tan x}\right)$

(16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

(17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{e^{\sin x} - e^x}$

$\lim\limits_{x\to \infty} x[\ln(x+1) - \ln(x-1)]$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2 - \sin^2 x}{x^4}$

$\lim\limits_{x\to \infty} xe^{-x} \ln x$

$$(19)\quad \lim_{x\to 0} (\cot^2 x - 1/x^2) \qquad (20)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x - x^2}{(2+2x+x^2)\, e^{-x} - 2}$$

$$(21)\quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} \qquad (22)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^3}$$

$$(23)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\, dt}{x} \qquad (24)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin x}{x \sin x}$$

٢٥ – إذا كــــان $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$ إثبـــت أن للمعـــادلة $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ جذر واحد على الأقل فى الفترة $[0, 1]$

(إعتبر الدالة $(f(x) = \int_0^x (a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n) dt)$)

٢٦ – إذا حققت الدوال $\psi(x)$ و $\phi(x)$ و $f(x)$ شروط نظرية القيمة المتوسطة مـن إتصــــال وقـــابلية تفـــاضل. إثبت أنـــه توجـد قيمة ξ بين a, b بحيث

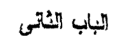
$$\begin{vmatrix} f(a) & \phi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \phi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \phi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

[إرشــــاد: إعتـــبر الـــدالة النـــاتجة من إســـتبدال الصـــف الأخـير بالدوال $f(x), \phi(x), \psi(x)$]

٢٧ – إذا حققت الدوال $\phi(x)$, $\psi(x)$ شروط نظرية كوشى للقيمة المتوسطة وكانت $\phi'(x) \neq 0$ إثبت أنه توجد نقطة $\xi \in (a, b)$ بحيث

$$\frac{\phi(\xi) - \phi(a)}{\psi(b) - \psi(\xi)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

[طبق نظرية رول على الدالة $\{\phi(x) - \phi(a)\}\{\psi(b) - \psi(x)\}$]



الباب الثانى

من طرق التكامل

Methods of integration

من طرق التكامل

يهدف هذا الباب إلى عرض بعض طرق التكامل ومحاولة تصنيفها في انماط تجعل دراستها منهجية. إفترضنا معرفة القارئ بتعريفي التكامل الغير محدد وكذلك التكامل المحدد والنظريات الأساسية المتعلقة بهما وخواصهما البسيطة.

١-٢ التكامل الغير محدد

إستبدال المتغيرات

سوف نعرض في هذه الفقرة وسيلة كثيرا ما تستخدم لحساب تكاملات يصعب تقييمها بطريقة مباشرة وهي إستبدال المتغيرات.

١-١-٢ موضوع تكامل بالهيئة

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/m}\right)$$

حيث R دالة نسبية بينما m عدد طبيعي.

قد يمكن إجراء هذا التكامل بوضع

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m \rightarrow x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$$

إذا كان موضوع التكامل بالهيئة

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/m}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right)$$

للتحلص من الجذور سويا.

يمكن وضع $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$ حيث p هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين m,n (وعليه يمكن التعميم لأي عدد منتهي من العوامل بالهيئة

$$[(ax+b)/(cx+d)]^{1/p}$$

مثال ١: لإيجاد

$$J=\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt[3]{x+1}-1)}$$

نضع $x+1=t^6$

$$J=\int 6\,\frac{(t^6-1)\,t^5\,dt}{t^3\,(t^2-1)}=6\int t^2(t^4+t^2+1)\,dt$$

قسمة مطولة

$$=6\,[\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3]+c$$

$$=6\,[\frac{1}{7}(x+1)^{7/6}+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}+\frac{1}{3}(x+1)^{1/2}]+c$$

٢-١-٢ تكاملات ذات الحدين

هي تكاملات يكون موضوعها تعبيرا من $x^m(a+bx^n)^p$ حيث m,n,p اعداد نسبية بينما a,b أي ثوابت.

يمكن إجراء هذه التكاملات في الحالات الآتية:

١- إذا كان p عددا صحيحا وكان q هو المضاعف المشترك الأصغر لعوامل مقامات m,n يمكن أن نفرض: $x=t^q$

مثال ٢: في التكامل

$$J=\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$p=-2\,,\,m=-\frac{1}{2}\,,\,n=\frac{1}{3}$$

بوضع $x=t^6$ نحصل على

$$J=\int \frac{6\,t^5\,dt}{t^3\,(1+t^2)^2}=6\int [\,\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{(t^2+1)^2}\,]\,dt$$

$$=6\,[\,\frac{1}{2}\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2}\,]+C=3\,[\,\tan^{-1}t-\frac{t}{1+t^2}\,]+C$$

وبوضع $\sqrt[6]{x}$ بدلا من t نحصل على التكامل بدلالة x

[٢]- إذا كـان p كسرا وكان $\frac{m+1}{n}$ عددا صحيحا يمكن أن نضع ، $t^q=(a+bx^n)$ حيث q هو مقام p.

مثال ٣: في التكامل

$$J=\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$p=-1/2\ ,\ m=1\ ,\ n=2/3\ ,\ (m+1)/n=3$$

يمكن أن نضع $1+x^{2/3}=t^2$ لنحصل على

$$J=\int x^{4/3}\,(1+x^{2/3})^{-1/2}\,x^{-1/3}\,dx$$

$$=\int (t^2-1)^2\,(t^{-1})\,3t\,dt=3\int (t^4-2t^2+1)\,dt$$

$$=3\cdot(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t)+C$$

وبوضع $\sqrt{1+x^{2/3}}$ بدلا من t نحصل على التكامل المطلوب

[٣]- إذا لم يكن أى من p أو $\frac{m+1}{n}$ عدد صحيح وكان $p+\frac{m+1}{n}$ عددا صحيحا يمكن أن نفرض

$$\frac{a+bx^n}{x^n}=ax^{-n}+b=t^q$$

حيث q هو مقام p

مثال ٤: في التكامل

$$J=\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}\,(1+x^2)^{-1/2}\,dx$$

$$m=-4\ ,\ n=2\ ,\ p=-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{m+1}{n}+p=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$$

وعليه يمكن أن نضع $t^2=\frac{1}{x^2}+1$

$$J=\int x^{-5}\,(\frac{1}{x^2}+1)^{-1/2}\,dx=\int x^{-6}\,(\frac{1}{x^2}+1)^{-1/2}\,x\,dx$$

$$=-\int (t^2-1)^3\, t^{-1} \frac{t}{(t^2-1)^2}\, dt = -\int (t^2-1)\, dt$$

$$=-\frac{t^3}{3}+t=\frac{t}{3}(3-t^2)+C$$

$$=\frac{1}{3}\ \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\ (3-\frac{x^2+1}{x^2}+C$$

$$=\frac{1}{3}x^{-3}\sqrt{x^2+1}\ (2x^2-1)+C$$

٣-١-٢ تكاملات من صيغ من الدرجة الثانية

نعرض لتكاملات بالهيئة $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ حيث R دالة نسبية.

يمكن تطبيق تعويضات أويلر الآتية في هذه التكاملات:

١ – إذا كان $a>0$ نضع $\sqrt{ax^2+bx+c}=t \ \pm\sqrt{a x^2}$

لنحصل على

$$x=\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}\, t}$$

مثال ٥: لإيجاد

$$J=\int \frac{dx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+2x}}$$

نضع

$$x^2+2x=(t-x)^2 \to x=\frac{t^2}{2(1+t)}$$

من ثم

$$J=\int \frac{8(1+t)^3}{(t+2)^6}\cdot\frac{2(1+t)}{t(t+2)}\cdot\frac{t(t+2)}{2(1+t)^2}\, dt$$

$$=\int \frac{8(1+t)^2}{(t+2)^6}\, dt = 8\int [\frac{1}{(t+2)^4}-\frac{2}{(t+2)^5}+\frac{1}{(t+2)^6}]\, dt$$

$$=8[-\frac{1}{3}\ \frac{1}{(t+2)^3}+\frac{2}{4(t+2)^4}-\frac{1}{5(t+2)^5}]+C$$

من ثم يمكن التعبير عن التكامل بدلالة x

٢ – إذا كان $c>0$ يمكن أن نضع $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

مثال ٦: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x+4}}$$

نضع $(x^2+2x+4) = (xt+2)^2$ وبالتالى نحصل على

$$x^2+2x = x^2t^2+4xt \Rightarrow x = 2\,\frac{2t-1}{1-t^2}$$

من ثم

$$= \int \frac{1-t^2}{2(t^2-t+1)} \cdot \frac{1-t^2}{2t(2-t)} \frac{4(t^2-t+1)\,dt}{(1-t^2)^2}$$

$$= \int \frac{dt}{t(2-t)} = \int \left(\frac{1/2}{t} + \frac{1/2}{2-t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{t}{2-t}\right)\right] + C$$

٣ – إذا أمكن تحليل ax^2+bx+c إلى الصورة $a(x-x_1)(x-x_2)$

نضع $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ أى أن

$$t^2 = \frac{a(x-x_2)}{x-x_1}$$

مثال ٧: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}}$$

نضع $\frac{x-q}{x-p} = t^2$ من ثم $x = \frac{q-pt^2}{1-t^2}$

$$J = \int \frac{dx}{(x-p)^2 t} = \int \frac{(1-t^2)^2}{t(q-p)^2} \cdot \frac{2t(q-p)}{(1-t^2)^2}\, dt$$

$$= \frac{2}{q-p} \int dt = \frac{2}{q-p}\, t + C = \frac{2}{q-p} \sqrt{\frac{x-q}{x-p}} + C$$

٤-١-٢ تكاملات لصيغ من الدرجة الثانية بالهيئة

$$(A) \qquad \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

حيث $P(x)$ كثيرة حدود.

يمكن إيجاد هذا التكامل بالصورة

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

حيث $Q(x)$ كثيرة حدود ذات معاملات غير معينة من درجة أقل

من

درجة $P(x)$ بينما λ ثابت مجهول.

بتفاضل طرفي التكامل السابق نحصل على

$$P(x) = Q'(x)\,(ax^2+bx+c) + Q(x)\,(ax+\frac{b}{2}) + \lambda$$

بمساواة المعاملات المتناظرة نحصل على معاملات Q وكذلك λ

مثال ٨: التكامل

$$J = \int \frac{4x^2+17x+14}{\sqrt{x^2+3x+2}}\, dx$$

يمكن كتابته بالهيئة

$$J=(Ax+B)\sqrt{x^2+3x+2}+C\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x ثم الضرب في $\sqrt{x^2+3x+2}$ نحصل

على

$$4x^2+17x+14 = A(x^2+3x+2) + (Ax+B)\left(x+\frac{3}{2}\right)+C$$

بمساواة المعاملات المتناظرة نحصل على

$$2A=4\ ,\ 3A+\frac{3A}{2}+B=17\ ,\ 2A+\frac{3}{2}B+C=14$$

$$i.e.,\qquad A=2\ ,\ B=8\ ,\ C=-2$$

$$\rightarrow J=(2x+8)\sqrt{x^2+3x+2}-2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+{}^3/_2)^2-{}^1/_4}}$$

$$=(2x+8)\sqrt{x^2+3x+2}-2\ln\left[(x+{}^3/_2)+\sqrt{x^2+3x+2}\right]+C$$

يمكن أيضا معالجة تكامل موضوعه $P(x)/Q(x)$ حيث كل من $P(x)\ ,\ Q(x)$ كثيرتي حدود وحيث تحتوي $Q(x)$ على أصفار (أو عوامل) مكررة، بطريقة مشابهة للمنهاج السابق ذكره.

لإيجـــاد التكامل المشار إليه (بفرض أن الكسر P/Q صحيح) نكتب $Q=Q_1Q_2$ حيث تتكون Q_2 من كل عامل من عوامل Q مأخوذا بالدرجة الأولى بينما $Q_1=Q/Q_2$ من ثم فإن

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx \qquad *$$

حيث $P_1(x)$ كثيرة حدود ذات معاملات غير معينة ومن درجة أقل بواحد عن درجة $Q_1(x)$ بينما $P_2(x)$ هي أيضا كثيرة حدود ذات معاملات غير معينة تقل درجتها أيضا درجة واحدة عن درجة $Q_2(x)$

بتفاضل • والضرب $Q(x)$ نحصل على متطابقة يمكن منها حساب الثوابت المجهولة في $P_1(x)$, $P_2(x)$

ملحوظة ١: حيث أن حساب التكامل فى الطرف الأيمكن من • يتطلب كـتابة موضـوع التكامل بـهيئة كسور جزئية، لذا يمكن بدءا ذى بدء كتابة $P_2(x) / Q_2(x)$ بالهيئة

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} + \ldots$$

أى بهيئة كسور جزئية قبل إشتقاق •

ملحوظة ٢: يمكن أن نلاحظ أن $Q_1(x)$ تمثل القاسم المشترك الأعلى بين كثيرتى الحدود $Q(x), Q'(x)$ وبالتالى يمكن إيجـاد $Q_1(x)$ بـدون إيجـاد جذور $Q(x)$ ومن ثم $Q_2 = Q/Q_1$. والتى يتوجب أن تكون أصفارها بسيطة.

ملحوظة ٣: الطريقة السابقة (والمسماه طريقة أوستروجرادسكى) توفر كثيرا من العمليات الحسـابية عند إحتواء $Q(x)$ على عوامل ذات تكرار عال وخاصة إذا كانت هذه العوامل بالهيئة $x^2 + ax + b$

مثال ٩: التكامل

$$J = \int \frac{12x}{(x-1)^2 (x^2+1)^2}$$

يمكن كتابته بالهيئة

$$J = \int \frac{12x}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} dx = \frac{Ax^2 + Bx + c}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$+ \int \left[\frac{L}{x-1} + \left(\frac{Mx+N}{x^2+1} \right) \right] dx$$

من تفاضل العلاقة • والضرب في ؟ نحصل على

$$12x=(2Ax+B)(x-1)(x^2+1)-(Ax^2+Bx+C)$$
$$[(x^2+1)+2x(x-1)]$$

$$+[L(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)](x-1)(x^2+1)$$

بوضع $x=1$

$$-2(A+B+C)=12' \quad \dots \qquad (1)$$

بوضع $x=i=\sqrt{-1}$

$$-A-B+C+i(-A+B+C)=6i$$
$$-A-B+C=0 \qquad (2)$$
$$-A+B+C=6$$

بحل المعادلات (3) , (2) , (1) نحصل على

$$A=-6 \quad , \quad B=3 \quad , \quad C=-3$$

معامل x^5

$$L+M=0 \qquad (4)$$

معامل x^4

$$2A-A-2A-L-2M+N=0$$
$$\Rightarrow -L-2M+N=-6 \qquad (5)$$

بوضع $x=0$

$$-L+N=B+C=0$$

بحل المعادلات (6) , (5) , (4) نحصل على

$$L=-M=N=-3$$

من ثم

$$J=\frac{-6x^2+3x-3}{x-1)(x^2+1)}+\int\left[\frac{-3}{x-1}+\frac{3x-3}{x^2+1}\right]dx$$

$$=\frac{-6x^2+3x-3}{(x-1)(x^2+1)}-3\left[\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+C\right.$$

٥-١-٢ تكاملات بالهيئة

$$\int \frac{A\,dx}{(x-d)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

حيث $k= 1,\ 2,\ \dots$

يمكن تحويل هذا التكامل إلى صيغة مثال ٨ وذلك بوضع $x-d=1/z$

مثال ١٠: لإيجاد

$$J=\int \frac{dx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+2x}}$$

نضع $x+2=\frac{1}{z}$ من ثم

$$\ln(x+2)=-\ln z \rightarrow \frac{dx}{x+2}=-\frac{dz}{z}$$

$$\therefore J=-\int \frac{z^3}{\sqrt{\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}}}\ \frac{dz}{z}=-\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-2z}}$$

بوضع $1-2z=t^2$ نحصل على

$$J=-\int \frac{[1\,(1-t^2)\,]^2}{4\quad t}\ (-t\,dt)\ =\frac{1}{4}\int\ (t^4-2t^2+1)\ dt$$

$$=\frac{1}{4}\ [\ \frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t]\ +C=\frac{t}{4}\,[\frac{t^4}{5}\ \ \frac{2t^2}{3}+1]\ +C$$

من التعويضات السابقة نحصل على $t^2=\frac{x}{x+1}$ وبالتالي

$$J=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ \ [\ \frac{1}{5}\ (\frac{x}{x+1})^2-\frac{2}{3}\ \frac{x}{x+1}+1]\ +C$$

$$=\frac{1}{60}\sqrt{x}\,(x+1)^{-5/2}\ (8x^2+20x+15)\ +C$$

٦-١-٢ تكاملات بالتهيئة

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}\,dx$$

حيث $m=1,2,...$

لمعالجة هذه الحالة نعتبر

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}} = \int \frac{Mx\quad dx}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}} + \int \frac{Ndx}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}$$

حيث يمكن وضع $ax^2+c=u^2$ في التكامل

$$\int \frac{Mx\,dx}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}$$

بينما يمكن وضع

$$z = (\sqrt{ax^2+c}\,)' = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+c}}$$

في التكامل الثاني ومنه نحصل على

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}} = \frac{dz}{a-z^2}\ ,\ x^2 = \frac{c^2}{a(a-z^2)}$$

وبالتالي يتحول التكامل إلى تكامل دوال نسبية

مثال ١١: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+a^2}}$$

نضع $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ومن ثم

$$z\sqrt{x^2+a^2} = x \rightarrow \sqrt{x^2+a^2}\,dz + z\,(\sqrt{x^2+a^2}\,)'\,dx = dx$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2+a^2}\,dz + z^2\,dx = dx$$

$$\rightarrow \frac{dz}{1-z^2} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot x^2 = \frac{a^2 z^2}{1-z^2}$$

$$J = \int \frac{(1-z^2)^2}{a^4 z^4} \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{a^4} \int \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^2} \right) dz$$

$$= \frac{1}{a^4} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} \right] + c = \frac{1}{a^4} \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{x^2+a}{x^2} \right] + c$$

٧-١-٢ تكاملات بالهيئة

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a}}$$

لأى عدد n .

يمكن إيجاد مثل هذه التكاملات (تكاملات ـت الحدين) بوضع

$$x^n = \frac{1}{z^2} \rightarrow n \ln x = -2 \ln z \rightarrow \frac{n dx}{x} = -\frac{2dz}{z}$$

مثال ١٢: لإيجاد

$$J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^{5/2}+a^2}}$$

نضع

$$x^{5/2} = \frac{1}{z^2} \rightarrow \frac{5}{2} \ln x = -2 \ln z \rightarrow \frac{5}{2} \frac{dx}{x} = -\frac{2dz}{z}$$

$$\rightarrow J = \int \frac{-{}^4/_5 \, dz}{z\sqrt{1/z^2+a^2}} = -\frac{4}{5} \int \frac{dz}{\sqrt{1+a^2 z^2}}$$

$$= -\frac{4}{5} \frac{1}{a} \sinh^{-1} az + c = -\frac{4}{5a} \sinh^{-1}(a x^{-5/4}) + C$$

مثال ١٣: أوجد $J=\int \frac{dx}{\sqrt{x^{n}-x^{2}}}$

نضع $x^{n-2}=\frac{1}{t^2}$ من ثم

$$J=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{n-2}-1}} = -\frac{2}{n-2}\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}$$

$$= \frac{-2}{n-2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{n-2}\cos^{-1} t$$

٨-١-٢ تكاملات بالهيئة

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

نستخدم التعويض $\tan\frac{x}{2}=t$

(مثلث قائم: الضلع المقابل t، المجاور 1، الوتر $\sqrt{t^2+1}$، الزاوية $x/2$)

$$\Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad and \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

لتحويل التكامل الى تكامل دالة نسبية

مثال ١٤: لايجاد $I=\int \frac{1}{\sin x - 7\cos x - 5}dx$

نضع $\tan\frac{x}{2}=t$ ، من ثم

$$I=\int \frac{(1+t^2)}{2t-7(1-t^2)-5(1+t^2)}\,\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+t-6} = \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{5}\left[\ln\frac{t-2}{t+3}\right]+A$$

مثال ١٥: لايجاد $I=\int \frac{dx}{5+4\cos^2 x}$

$$I=\int \frac{dx}{5(\cos^2x+\sin^2x)+4\cos^2x} = \int \frac{dx}{9\cos^2x+5\sin^2x}$$

بقسمة البسط والمقام على $\cos^2 x$ نحصل على

$$I=\int \frac{\sec^2 x\,dx}{9+5\tan^2 x}=\int \frac{d\tan x}{9+5\tan^2 x}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\tan x\right)+A$$

? ✓

تكاملات تعتمد على الصيغة: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

مثال لإيجاد $I = \int_0^\pi x\sin^6 x\,dx$ نعتبر

$$I = \int_0^\pi x\sin^6 x\,dx = \int_0^\pi (\pi-x)\sin^6(\pi-x)dx$$

$$= \int_0^\pi (\pi-x)\sin^6 x\,dx \Rightarrow 2I = \int_0^\pi \pi\sin^6 x\,dx$$

$$= \pi\frac{5}{6}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

مثال: لإيجاد $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ نعتبر

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

٩-١-٢ تكاملات بالاختزال المتتالي

تتميز هذه الطريقة بفاعليتها عند إيجـاد تكاملات تحمل ادله أو أسس حيث يبقى منهج التكامل ثابتا عند أدلة أو أسس أصغر وحيث تقودنا الصيغة الاختزالية الى تكامل يسهل حسابه.

مثال ١٦: لإيجاد صيغة إختزالية للتكامل $\int \tan^n x\,dx$ نعتبر

$$u_n = \int \tan^n x\,dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x\,d\tan x - u_{n-2}$$

$$u_n = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - u_{n-2}$$

مثال ١٧: لإيجاد صيغة إختزالية للتكامل $I_n = \int x^n e^x dx$ نعتبر

$$I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n de^x = x^n e^x - \int e^x dx^n = x^n e^x - nI_{n-1}$$

مثال ١٨: إثبت أن

$$u_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(2n-2)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,u_{n-1}$$

حقيقة:

$$u_n = \int (x^2+1)^{-n} dx = x(x^2+1)^{-n} + 2n\int x^2 (x^2+1)^{-n-1} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+)^{n+1}}\, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\, [u_n - u_{n+1}]$$

$$2n\, u_{n+1} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)\, u_n$$

بوضع $n-1$ بدلا من n

$$2(n-1)\, u_n = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)\, u_{n-1}$$

مثال ١٩: إذا كان

$$I_{m,n} = \int \frac{x^m\, dx}{(x^2+1)^n}$$

فاثبت أن

$$2(n-1)\, I_{m,n} = x^{m-1}\, (x^2+1)^{(n-1)} + (m-1)\, I_{m-2,n-1}$$

حقيقة

$$I_{m,n} = \int \frac{x^m\, dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{x^{m-1}\, dx^2}{(x^2+1)^n} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)} \int x^{m-1}\, d(x^2+1)^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{2(1-n)}\, x^{m-1}\, (x^2+1)^{-n+1} - \frac{m-1}{2(1-n)} \int \frac{x^{m-2}}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx$$

i.e., $2(n-1)\, I_{m,n} = x^{m-1}\, (x^2+1)^{-n+1} + (m-1)\, I_{m-2,n-1}$

مثال ٢٠: لإيجاد صيغة إختزالية للتكامل

$$I_{p,q} = \int x^p\, (1+x)^q\, dx$$

طبقا للتكامل بالتجزئ

$$I_{p,q}=\int \frac{1}{P+1}\ (1+x)^{q}\,dx^{P+1}$$

$$\rightarrow (P+1)\ I_{p,q}=x^{P+1}\,(1+x)^{q}-\int x^{P+1}\,q\,(1+x)^{q-1}\,dx$$

$$=x^{P+1}\ (1+x)^{q}-q\,I_{P+1,q-1}$$

مثال ٢١: لإيجاد صيغة إختزالية للتكامل $I_{m,n}=\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx$

نعتبر أدبالتجزئ.

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\sin^{m-1}x}{\cos^{n-1}x}=[\,(m-1)\,\sin^{m-2}x\cos^n x+(n-1)\,\sin^m x\cos^{n-2}x]$$

$$/\cos^{2n-2}x$$

$$=(m-1)\ \frac{\sin^{m-2}x}{\cos^{n-2}x}+(n-1)\ \frac{\sin^m x}{\cos^n x}$$

بتكامل الطرفين نحصل على

$$(n-1)\ I_{m,n}=\frac{\sin^{m-1}x}{\cos^{n-1}x}-(m-1)\ I_{m-2,n-2}$$

مثال ٢٢: سوف نوجد صيغة إختزالية للتكامل $I_{m,n}=\int \frac{\cos mx\,dx}{\cos^n x}$

$$I_{m,n}=\int \frac{\cos mx+\cos(m-2)\,x-\cos(m-2)\,x}{\cos^n x}\,dx$$

$$=\int \frac{2\cos(m-1)\,x\cos x-\cos(m-2)\,x}{\cos^n x}\,dx$$

$$=2\ I_{m-1,n-1}-I_{m-2,n}$$

(*) مثال ٢٣: نعتبر التكامل $I_{m,n} = \int \frac{\cos mx}{\cos nx}\, dx$

$$I_{m,n} = \int \frac{\cos mx + \cos(m-2n)x - \cos(m-2n)x}{\cos nx}\, dx$$

$$= \int \frac{2\cos(m-n)x\cos nx - \cos(m-2n)x}{\cos nx}\, dx$$

$$= 2\,\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - I_{m-2n,n}$$

(*) مثال ٢٤: يمكن إيجاد صيغة إختزالية للتكامل

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x\, dx$$

$$I_{m,n} = -\int \cos^m x \sin^{n-1} x\, d\cos x = -\frac{1}{m+1}\int \sin^{n-1} x\, d\cos^{m+1} x$$

$$= -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{m+2} x \sin^{n-2} x\, dx$$

$$\to (m+1)\, I_{m,n} = -\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x$$

$$+ (n-1)\int \cos^m x\,(1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\, dx$$

$$i.e.,\quad (m+1)\, I_{m,n} = -\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1)\,[I_{m,n-2} - I_{m,n}]$$

$$\text{or}\quad (m+n)\, I_{m,n} = -\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1)\, I_{m,n-2}$$

مثال ٢٥: إذا كان $I_{m,n} = \int \sin^m x \sin nx\, dx\ ,\ m \ge 2$

أوجد صيغة إختزالية تربط $I_{m,n}$ مع $I_{m-2,n}$

يمكن إيجاد صيغة إختزالية بالتكامل

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n}\int \sin^m x\, d\cos nx \qquad m \ge 2$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\sin^m x \cos nx\right] + \frac{m}{n}\int \sin^{m-1} x \cos x \cos nx \, dx$$

$$\rightarrow n I_{m,n} = -\sin^m x \cos nx + \frac{m}{n}\int \sin^{m-1} x \cos x \, d \sin nx$$

$$n I_{m,n} = -\sin^m x \cos nx + \frac{m}{n}\left[\sin^{m-1} x \cos x \sin nx\right]$$

$$-\frac{m}{n}\int \sin nx \left[(m-1)\sin^{m-2} x \cos^2 x - \sin^m x\right] dx$$

$$\rightarrow n^2 I_{m,n} = -n \sin^m x \cos nx + m \sin^{m-1} x \cos x \sin nx$$

$$-m(m-1)\left[I_{m-2,n} - I_{m,n}\right] + m I_{m,n}$$

$$\rightarrow I_{m,n}\left[n^2 - m^2 + m - m\right] = -n \sin^m x \cos nx$$

$$+ m \sin^{m-1} x \cos x \sin nx - m(m-1) I_{m-2,n}$$

i.e. $(n^2 - m^2) I_{m,n} = -n \sin^m x \cos nx$

$$+ m \sin^{m-1} x \cos x \sin nx - m(m-1) I_{m-2,n}$$

بوضع $J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \sin nx \, dx$ نحصل على الصيغة الإختزالية

$$(n^2 - m^2) J_{m,n} = -m(m-1) J_{m-2,n}$$

مثال ٢٦: يمكن إيجاد صيغة إختزالية للتكامل

$$I_n = \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$$

كالآتي:

$$I_n = \int \frac{(a+b\cos x)}{(a+b\cos x)^{n+1}}\, dx = a\, I_{n+1} + b \int \frac{d \sin x}{(a+b\cos x)^{n+1}}$$

$$= a\, I_{n+1} + b \frac{\sin x}{(a+b\cos x)^{n+1}}$$

$$-b^2 (n+1) \int \sin x\, (a+b\cos x)^{-n-2} \sin x\, dx$$

$$= a\, I_{n+1} + \frac{b \sin x}{(a+b\cos x)^{n+1}} - (n+1) \int \frac{b^2 \sin^2 x\, dx}{(a+b\cos x)^{n+2}}$$

$$= a\, I_{n+1} + \frac{b \sin x}{(a+b\cos x)^{n+1}}$$

$$-(n+1) \int \frac{b^2 - a^2 + 2a(a+b\cos x) - (a+b\cos x)^2}{(a+b\cos x)^{n+2}}\, dx$$

$$= a\, I_{n+1} + \frac{b \sin x}{(a+b\cos x)^{n+1}} - (n+1)(b^2 - a^2)\, I_{n+2}$$

$$-2a(n+1)\, I_{n+1} + (n+1)\, I_n$$

بوضع $n-2$ بدلا من n نحصل على

$$(n-1)(a^2 - b^2)\, I_n = -b \frac{b \sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ (2n-3)\, a\, I_{n-1} - (n-2)\, I_{n-2}$$

مثال ٢٧: لإيجاد صيغة إختزالية للتكامل

$$I_{m,n} = \int \frac{\sin^m x}{x^n}\, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئ

$$I_{m,n} = \frac{1}{-n+1} \int \sin^m x \, dx^{-n+1}$$

$$\Rightarrow (1-n)\, I_{m,n} = \left[\frac{\sin^m x}{x^{n-1}} - \int \frac{m \sin^{m-1} x \cos x}{x^{n-1}} \, dx \right]$$

$$\Rightarrow (2-n)(1-n)\, I_{m,n} = (2-n) \frac{\sin^m x}{x^{n-1}}$$

$$-m \int \sin^{m-1} x \cos x \, d\, x^{-n+2}$$

$$\Rightarrow (n-1)(n-2)\, I_{m,n} = -(n-2) \frac{\sin^m x}{x^{n-1}} - m \left[\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{x^{n-2}} \right]$$

$$+ m \int \frac{(m-1) \sin^{m-2} x \cos^2 x - \sin^m x}{x^{n-2}} \, dx$$

$$\Rightarrow (n-1)(n-2)\, I_{m,n} = -(n-2) \frac{\sin^m x}{x^{n-1}} - m \frac{\sin^{m-1} x \cos x}{x^{n-2}}$$

$$+ m(m-1) \int \frac{\sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x)}{x^{n-2}} - m\, I_{m,n-2}$$

$$(n-1)(n-2)\, I_{m,n} = -(n-2) \frac{\sin^m x}{x^{n-1}} - m \frac{\sin^{m-1} x \cos x}{x^{n-2}}$$

$$+ m(m-1)\, I_{m-2,n-2} - m(m-1)\, I_{m,n-2} - m I_{m,n-2}$$

i.e., $$(n-1)(n-2)\, I_{m,n} = -(n-2) \frac{\sin^m x}{x^{n-1}} - m \frac{\sin^{m-1} x \cos x}{x^{n-2}}$$

$$- m^2 I_{m,n-2} + m(m-1)\, I_{m-2,\, n-2}$$

مثال ٢٨: أوجد صيغة إختزالية للتكامل

$$v_n = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^n} \, dx$$

حيث $m \geq n$ و وكلاهما إما زوجيان فى آن واحد أو فرديان فى آن واحد.

بما أن

$$\frac{\sin^m x}{x^{n-1}} \quad , \quad \frac{\sin^{m-1} x \cos x}{x^{n-2}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

من ثم يمكن كتابة الصيغة الإختزالية السابقة بالهيئة

$$(n-1)(n-2)\, V_{m,n} = -m^2\, V_{m,n-2} - m(m-1)\, V_{m-2,n-2}$$

مثال ٢٩: إذا كان

$$\int_0^\infty \frac{\sin r\theta}{\theta}\, d\theta = \begin{cases} \pi/2 & r>0 \\ 0 & r=0 \\ -\pi/2 & r<0 \end{cases}$$

وكان

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 r\theta}{\theta^2}\, d\theta = \begin{cases} +\frac{\pi r}{2} & r>0 \\ 0 & r=0 \\ -\frac{\pi r}{2} & r<0 \end{cases}$$

أوجد

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 \theta\, d\theta}{\theta}$$

لإيجاد I نلجأ للتعبير عن بدلالة النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية θ حيث لانستطيع تطبيق الصيغة الإختزالية فى المثال السابق

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 \theta}{\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{4}\, \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\, [3-1]\, \frac{\pi}{2} = \pi/4$$

مثال ٣٠: إثبت أن

$$(n-1)\int \frac{\ln x}{(1+x)^n}\,dx = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-2)}\ \frac{1}{(1+x)^{n-2}}$$

$$+\ln\frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}}$$

من ثم أوجد

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^n}$$

بالتكامل بالتجزى

$$\int \frac{\ln x}{(1+x)^n}\,dx = \int \frac{\ln x}{1-n}\ d(1+x)^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{1-n}\ \left[\frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}} - \int \frac{dx}{x(1+x)^{n-1}}\right]$$

$$\Rightarrow (n-1)\int \frac{\ln x}{(1+x)^n\,dx} = -\frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}} + \int \frac{dx}{x(1+x)^{n-1}}$$

يمكن إجراء التكامل فى الطرف الأيمن بإيجاد الكسور الجزئية لموضوع التكامل بوضع $t=1+x$

$$\frac{1}{x(1+x)^{n-1}} = \frac{1}{(t-1)\ t^{n-1}}$$

$$= \frac{A}{t-1} + \frac{B_{n-1}}{t^{n-1}} + \ldots + \frac{B_1}{t}$$

يمكن إيجاد المجاهيل $A\,.\,B_{n-1},\ldots,B_1$ بفك $\frac{1}{(t-1)\ t^{n-1}}$ بذات الحدين ومقارنة الحدود المتناظرة.

$$-\frac{1}{t^{n-1}}\ (1-t)^{-1} = -\frac{1}{t^{n-1}}\ (1+t+t^2+\ldots)$$

من ثم

$$B_{n-1} = \ldots = B_1 = -1 \, , A = 1$$

وعليه

$$(n-1)\int \frac{\ln x}{(1+x)^n}\,dx = -\frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}} + \int [\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2} - \ldots - \frac{1}{(1+x)^{n-1}}]\,dx$$

$$= -\frac{\ln x}{(1+x)^{n-1}} + \ln\frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}$$

$$+\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{(n-2)\,(1+x)^{n-2}} + C$$

لحساب $\int_0^\infty \frac{ln x}{(1+x)^n}\,dx$

$$\int_0^\infty \frac{ln x}{(1+x)^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\,[\frac{-ln x}{(1+x)^{n-1}} + \frac{\ln x}{1+x} +$$

$$+\frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{1}{(n-2)\,(1+x)^{n-2}}]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\,[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2}]\,.$$

تمارين

١ – أوجد تكاملات الدوال الآتية بالنسبة إلى x

$\ln^2 x,\ x^2 \ln^2 x,\ x\sin^{-1} x,\ x^3 \sin ax,\ \tan^{-1} x/x^2,$

$x^3\sqrt{1+x^2},\ \sin^5 x\cos^3 x,\ \sin^2 x\cos 3x,\ x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$,\ x^2 \ln(1-x^2)$

٢ – أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x التى موضوعها

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)},\ \frac{x}{(x-a)^2(x-b)},\ \frac{x}{(x-a)^2(x-b)^2},$$

$$\frac{x}{(x-a)^3}$$

٣ – أوجد التكاملات بالنسبة إلى x التى موضوعها

$$\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\ \frac{x^3}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

$$.\ \frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)},\ \frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)^2}$$

٤ – أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x التى موضوعها

$$\frac{x}{1+x^3},\ \frac{x^3}{(x-1)^2(x^3+1)},\ \frac{1}{x^4+1},\ \frac{1}{1+x^2+x^4}$$

٥ – أوجد

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad ,\ b>a$$

أ – بإستخدام التعويض $(b-x)/(x-a)=t^2$

ب– باستخدام التعويض $x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$

٦- أوجد $\int \frac{x^3\, dx}{(x^2+1)^3}$ باستخدام

أ - التعويض $x = \tan\theta$

ب - التعويض $x^2+1 = u$

٧ - استخدم التعويض $2x+a+b = \frac{1}{2}(a-b)\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)$ أو بضرب البسط و المقام فى $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$ (حيث $a>b$) لإثبات أن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \frac{1}{2}\sqrt{a-b}\left(t+\frac{1}{3t^3}\right);$$

٨ - أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x التى موضوعها الدوال الآتية:

$$\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ ,\ \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}\ ,\ \sqrt[3]{\frac{2+x}{3-x}}$$

٩ - أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x التى موضوعها:

$$x\sqrt[4]{1-x^2}\ ,\ \frac{1}{x\sqrt[5]{1+x^2}}\ ,\ \frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}}\ ,\ (4x^2+3)^{-5/2}$$

$$x^8(1+2x^3)^{1/2}\ ,\ (ax^2+b)^{3/2}\ ,\ x^{2/3}(2+x^{1/3})^{4/3}\ ,\ x^3\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{x(1+x^5)}\ ,\ \frac{1}{(a+x)\sqrt{b+x}}\ ,\ \frac{x^2+1}{x\sqrt{4x^2+1}}\ ,\ \frac{1}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}$$

١٠ - أوجد

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+3)^{7/2}}\,dx\ ,\ \int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}$$

١١ - أوجد

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}\ ,\ \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\ ,\ \int \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{(x-1)^2}\,dx$$

١٢ – أوجد قيم التكاملات بالنسبة إلى x التى موضوعها:

$$\frac{1}{13+5\cos x}\ ,\ \frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}\ ,\ \cos^3 x\sqrt{\sin x}\ ,\ \cos^2 x\sin 3x$$

١٣ – أوجد

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+9}}\,dx\ ,\ \int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$$

١٤ – إثبت بإستخدام التعويض $y=\sqrt{ax^2+2bx+c}/(x-p)$ أن

$$\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\int \frac{dy}{\sqrt{dy^2-c}}$$

حيث

$$d=ap^2+2bp+c\ ,\ e=ac-b^2$$

١٥ – إثبت أن التعويض $x=(1+y^2)/(3-y^2)$ يحول التكامل

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x+1}}$$

إلى تكامل لدالة نسبية

١٦ – إستخدم التعويض $u^2=x+1+x^{-1}$ لحساب

$$\int \frac{x-1}{x+1}\ \frac{dx}{\sqrt{x(x^2+x+1)}}$$

١٧ – إستخدم التعويض $x=a+(b-a)y$ لإثبات أن

$$\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\,dx=(b-a)^{m+n+1}\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

لأى أعداد صحيحة موجبة m,n

إثبت صحة الصيغ الإختزالية الآتية:

18- $I_n=\int \cos^n x\,dx=\frac{1}{n}[\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\,I_{n-2}]$

$$19-\quad I_n=\int \sin^n x\,dx=\frac{1}{n}\left[-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\,I_{n-2}\right]$$

$$20-\quad I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}$$

$$21-\quad I_n=\int \sec^n x\,dx=\frac{\sin x\sec^{n-1}x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\,I_{n-2}$$

$$22-\quad I_n=\int\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\rightarrow(n-1)\,(I_n-I_{n-2})=2\sin(n-1)x$$

$$23-\quad I_{m,n}=\int x^m(\ln x)^n\,dx\rightarrow(m+1)\,I_{m,n}=x^{m+1}(\ln x)^n-n\,I_{m,n-1}$$

$$24-\quad I_{m,n}=\int\cos^m x\sin^n x\,dx$$

$$\rightarrow(m+n)\,I_{m,n}=-\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+(n-1)\,I_{m,n-2}$$

$$=\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x+(m-1)\,I_{m-2,n}$$

$$25-\quad I_{m,n}=\int\cos^m x\sin n\,dx$$

$$\rightarrow(m+n)\,I_{m,n}=-\cos^m x\cos nx+m\,I_{m-1,n-1}$$

٢٦ – أوجد صيغ إختزالية لتكاملات الدوال الآتية بالنسبة إلى x

$$x^n\sqrt{1-x^2}\;,\quad x^n/\sqrt{1+x^2}\;,\quad \cos nx\sin^m x,\;(ax^2+2bx+c)^{-n}$$



دوال بيتا وجاما

Beta and Gamma functions

٣-١ دالة جاما

لقيم $x>0$ يتقارب التكامل $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ ويسمى دالة جاما ويرمز لها بالرمز

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

بإجراء تكامل بالتجزئ نحصل على

$$\Gamma(x) = [-t^{x-1} e^{-t}]_0^{\infty} + (x-1)\int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t}\, dt = (x-1)\,\Gamma(x-1),$$

$$or \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

إذا كان x عددا صحيحا موجبا فإن

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots 3.2.1\,\Gamma(1),$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

من ثم

العلاقة $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ تقدم وسيلة لحساب دالة جاما لأى عدد موجب أكبر من الوحدة بدلالة دالة جاما لعدد موجب أقل من الوحدة كما تقدم وسيلة لتعريف $\Gamma(x)$ لقيم x السالبة حيث تعرف

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

مثال ١: أوجد

$$I=\int_0^{\infty} x^6 e^{-x^3}\,dx \quad \Gamma(x)=(x-1)!$$

بوضع $x^3=t$ نحصل على

$$I=\int_0^{\infty} t^2 \frac{1}{3} t^{-2/3} e^{-t}\,dt=\frac{1}{3}\int_0^{\infty} t^{4/3} e^{-t}\,dt=\frac{1}{3}\Gamma(7/3)$$

٣-٢ تحويلات دالة جاما

١ – بوضع $y=e^{-t}$ نحصل على

$$\Gamma(x)=\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{y}\right)^{x-1} dy$$

٢ – بوضع kt بدلا من t نحصل على

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-kt} k^x t^{x-1}\,dt$$

$$i.e \qquad \int_0^{\infty} e^{-kt} t^{x-1}\,dt=\frac{\Gamma(x)}{k^x}$$

٣ – بوضع $t^x=y$ نحصل على

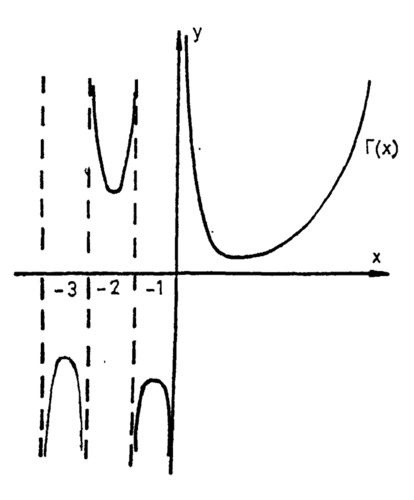
$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-y^{1/x}}\,dy$$

$$i.e \qquad \int_0^{\infty} e^{-y^{1/x}}\,dy=x\,\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$$

بوضع $x=\frac{1}{2}$ نحصل على

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\sqrt{\pi}$$

منحنى دالة جاما موضح بالشكل مع جدول لبعض قيم $\Gamma(x)$



x	1	1.25	1.5	1.75	2
$\Gamma(x)$	1	0.9064	0.8862	0.9191	1

مثال ٢: إثبت أنه إذا كان n عددا صحيحا موجبا فإن

$$1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}=2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

الحل: نبدأ بالطرف الأيمن

$$2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=2^n\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=2^n\{\frac{2n-1}{2}\ \frac{2n-3}{2}\ \ldots\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\}$$

$$=\{(2n-1)\ (2n-3)\ \ldots 3.1\}\sqrt{\pi}$$

مثال ٣: إذا كان k ثابتا موجبا، إثبت أن

$$I=\int_0^k (\int_0^{k-x} e^{-(x+y)}\ x^{n-1}\ y^{m-1}\ dy)\ dx$$

$$=\int_0^1 (1-v)^{n-1}\ v^{m-1}\ dv\int_0^k e^{-u}\ u^{n+m-1}\ du$$

الحل: بوضع $x+y=u, y=uv$ تتحول شريحة المساحة $dx\,dy$ إلى $u\,du\,dv$ وتتحول منطقة التكامل إلى المنطقة المحددة بالمنحنيات الآتية:

$$u=0\ ,\ v=0\ ,\ v=1\ ,\ u=k$$

$$I=\int_0^1 (\int_0^k e^{-u}\ [u(1-v)]^{n-1}\ (uv)^{m-1}\ u\,du)\ dv$$

$$=\int_0^1 (1-v)^{n-1}\ v^{m-1}\ dv.\int_0^k e^{-u}\ u^{n+m-1}\ du$$

٣-٣ دالة بيتا

يتقارب التكامل $\int_0^1 t^{m-1}\ (1-t)^{n-1}\ dt$ لقيم $m>0\ ,\ n>0$ ويطلق عليه دالة بيتا في المتغيرين m, n ويرمز له بالرمز $\beta\ (m, n)$

$$\beta\ (m, n)=\int_0^1 t^{m-1}\ (1-t)^{n-1}\ dt$$

بالتكامل بالتجزئ يمكن الحصول على علاقة تكرارية كالآتي

$$\beta\ (m, n)=[\frac{t^m}{m}\ (1-t)^{n-1}]_0^1+\frac{n-1}{m}\ \beta\ (m+1\ , n-1)\quad (m>0\ ,\ n>1)$$

$i.e \quad m\beta(m,n) = (n-1)\beta(m+1, n-1)$

٣-٤ تحويلات دالة بيتا

١- بوضع $t=1-u$ نحصل على

$$\beta(m,n) = \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1}\,du = \beta(n,m)$$

٢- بوضع $t=\sin^2\theta$ نحصل على

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta$$

٣ - بوضع $t=\dfrac{y}{1+y}$ نحصل على

$$\beta(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

٣-٥ علاقة بين دوال بيتا وجاما

سوف نثبت أن دالة بيتا يمكن التعبير عنها بدلالة دوال جاما

نعتبر التكامل الثنائي

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy}(xy)^{m-1} e^{-x} x^n\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x(y+1)} x^{m+n-1} y^{m-1}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} \Gamma(m+n)\, dy = \Gamma(m+n)\,\beta(m,n)$$

بعكس ترتيب التكامل

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x} x^{m+n-1} y^{m-1} e^{-xy}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^{m+n-1} \frac{\Gamma(m)}{x^m} dx = \Gamma(m)\Gamma(n)$$

من ثم

$$\rightarrow \beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

نعرض الآن لبعض النتائج المرتبطة بالعلاقة السابقة:

$$(i) \qquad \beta(m+n,p) = \frac{\Gamma(m+n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)} \Rightarrow$$

$$\beta(m,n)\,\beta(m+n,p) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}$$

وحيث أن العلاقة الأخيرة متماثلة فى m, n, p من ثم

$$\beta(m,n)\,\beta(m+n,p) = \beta(n,p)\,\beta(n+p,m) = \beta(p,m)\,\beta(p+m,n$$

بوضع $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = (a-b)$ فى علاقة دالة بيتا نحصل على

$$\beta(m,n) = \int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{n-1} dy = a^m b^n \int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[a+(b-a)x]^{m+n}} dx$$

بوضع $b-a = c$ نحصل على

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[a+cx]^{m+n}} dx = \frac{1}{a^m} \frac{1}{(a+c)^n} \beta(m,n)$$

بوضع $x = \sin^2\theta$ نحصل على

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{m+n}} d\theta = \frac{1}{2a^m b^n} \beta(m,n)$$

مـن التكـامل $\beta(m,n)=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$ وبوضـــع $m+n=1$
نحصل على

$$(iv)\quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx=\Gamma(m)\,\Gamma(1-m)$$

حيث m كسر صحيح موجب.

نتيجة هامة:

سوف نثبت أن

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}\qquad 0<n<1$$

نعتبر التكامل

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx\qquad 0<n<1$$

$$=\left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)\left(\frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx\right)=I_1+I_2$$

$$I_2=\int_1^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx=\int_1^0 \frac{y^{1-n}}{1+{}^1/_y}\left(-\frac{1}{y^2}\,dy\right)\quad \left(put\, x=\frac{1}{y}\right)$$

$$=\int_0^1 \frac{y^{-n}}{1+y}\,dy$$

$$i.e.\ I=\int_0^1 \frac{x^{n-1}+x^{-n}}{1+x}\,dx$$

$$=\int_0^1 (x^{n-1}+x^{-n})\,(1-x+x^2-\ldots+(-1)^k x^k)\,dx$$

$$+(-1)^{k+1}\int_0^1 x^{k+1}\ \frac{x^{n-1}+x^{-n}}{1+x}\,dx$$

$$=\{\frac{1}{n}-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}-\frac{1}{3+n}+\ldots+(-k)^k\frac{1}{k+m}$$

$$+\frac{1}{1-n}-\frac{1}{2-n}+\frac{1}{3-n}-\ldots-(-1)^k\frac{1}{k-n}+(-1)^k\ \frac{1}{k-n+1}\}$$

$$+(-1)^{k+1}\int_0^1 x^{k+1}\ \frac{x^{n-1}+x^{-n}}{1+x}\,dx$$

عنـدما تكبر k بدون حـد ينعدم الحـد الأخير فى المتسـلسـلة وهـو $(-1)^k\ \frac{1}{k-n+1}$ كذلك ينعدم التكامل

$$\int_0^1 x^{k+1}\ \frac{x^{n-1}+x^{-n}}{1+x}\,dx$$

وذلك لأن x كسر صحيح موجب فى الفترة $(0,\ 1)$.

أيضا من مفكوك

$$\operatorname{cosec} z=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+\pi}-\frac{1}{z-\pi}+\frac{1}{z+2\pi}+$$

$$+\frac{1}{z-2\pi}+\frac{1}{z+3\pi}-\frac{1}{z-3\pi}+\ldots$$

نرى أن

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}+\frac{1}{2+n}-\frac{1}{2-n}+\ldots,=\pi/\sin n\pi$$

من ثم

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin n\pi} = \Gamma(n)\,\Gamma(1-n) \qquad 0<n<1$$

مثال ٤: أوجد $\int_0^1 x^{3/4}\,(1-x)^{-3/4}\, dx$

الحل:

$$\int_0^1 x^{3/4}\,(1-x)^{-3/4}\, dx = \beta\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{3}{4}\,\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,\pi$$

نتائج هامة:

١ – سوف نثبت أن

$$2^p\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)$$

من تعريف دالة بيتا

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\, dx$$

$$\therefore\ \beta(p,p) = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1} dx$$

حيث أن موضع التكامل يعطي قيما متساوية عند وضع $x = \frac{1}{2} + h$ أو $x = \frac{1}{2} - h$ من ثم يكون موضوع التكامل متماثلا حول $x = \frac{1}{2}$ وعليه

$$\beta(p,p) = 2\int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1} dx$$

بوضع $\frac{1}{2} - x = \frac{\sqrt{z}}{2}$ نحصل على

$$\beta(p,p)=2\int_1^0 \frac{1}{2^{2p-2}}(1-z)^{p-1}\left(-\frac{1}{4}z^{-1/2}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 z^{-1/2}(1-z)^{p-1}dz=\frac{1}{2^{2p-1}}\beta\left(\frac{1}{2},p\right)$$

i.e. $$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma(^1/_2)\Gamma(p)}{\Gamma(p+^1/_2)}$$

or $$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$$

بوضع $2p=q+1$ نحصل على

$$2^q\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\quad\Gamma\quad\left(\frac{q+2}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(q+1)$$

٢ – يمكن أن نثبت بإستخدام التكامل الكنتورى على ربع دائرة أن

$$\int_0^\infty t^{k-1}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(t)\,dt=\Gamma(k)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\qquad 0<k<1$$

مثال ٥: أوجد $I=\int_b^a (x-b)^{m-1}(a-x)^{n-1}dx$

بوضع $\frac{x-b}{a-b}=u$ نحصل على

$$I=\int_0^1 [(a-b)\,u]^{m-1}[(a-b)\,(1-u)]^{n-1}(a-b)\,du$$

$$=(a-b)^{m+n-1}\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}du=(a-b)^{m+n-1}\beta(m,n)$$

مثال ٦: أوجد $I=\int_0^{\pi/2}\tan^n x\,dx$

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\sec^n x\,dx=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2}\ ,\ \frac{1-n}{2}\right)$$

مثال ٧: إثبت أن

$$I=\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\{\Gamma(^3/_4)\}^2}{\sqrt{2\pi}}$$

بوضع $x^4 = u$ نحصل على

$$I=\int_0^1 u^{1/2}\ (1-u)^{-1/2}\ (\frac{1}{4}u^{-3/4})\ du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{-1/4}\ (1-u)^{-1/2}\ du=\frac{1}{4}\beta\ (\frac{3}{4}\ ,\ \frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\ (\frac{3}{4})\ \Gamma\ (\frac{1}{2})\ /\Gamma\ (\frac{5}{4})$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\ (\frac{3}{4})\ \sqrt{\pi}/\ \frac{1}{4}\Gamma\ (\frac{1}{4})\ =\sqrt{\pi}\qquad \frac{\{\Gamma(^3/_4)\}^2}{\Gamma(^3/_4)\ \Gamma(^1/_4)}$$

$$=\sqrt{\pi}\frac{\{\Gamma(3/4)\}^2}{\pi/(\sin\frac{\pi}{4})}$$

مثال: إحسب $\Gamma(3.5)$

من الصيغة $\Gamma(P+½)=\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(2P)}{2^{2p-1}\Gamma(P)}$ والمسماه بالصيغة المضاعفة (douplication formula) نحصل على $\Gamma(3.5)=\dfrac{5!\sqrt{\pi}}{2^5 2!}$

تمارين

١ - إثبت أن

$$(a)\quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\sqrt{\pi}\,2^{1/3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$(b)\quad \sqrt{3}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2=\sqrt{\pi}\,2^{1/3}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$(c)\quad \Gamma(0.1)\,\Gamma(0.2)\ldots\Gamma(0.9)=\frac{(2\pi)^{9/2}}{\sqrt{10}}$$

$$(d)\quad \Gamma\left(\frac{3}{2}-x\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+x\right)=\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\pi\sec\pi x \qquad -1<x<1$$

٢ - إحسب التكاملات الآتية مستعينا بدوال بيتا وجاما

$$(a)\quad \int_0^1 x^6(1-x)^3\,dx \qquad\qquad (b)\quad \int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{-1/2}\,dx$$

$$(c)\quad \int_0^\infty e^{-x^4}\,dx \qquad\qquad (d)\quad \int_0^a (a^n-x^n)^{1/n}\,dx$$

$$(e)\quad \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$(f)\quad \int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin 2x}\,dx \qquad\qquad (g)\quad \int_0^\infty 4^{-9x^2}\,dx$$

$$(h)\quad \int_0^\infty\frac{dx}{x^n+1} \qquad\qquad (i)\quad \int_0^\infty \operatorname{sech}^8 x\,dx$$

$$(j)\quad \int_{-\infty}^\infty\frac{e^{2x}}{(e^{3x}+1)^2}\,dx \qquad\qquad (k)\quad \int_0^\infty\frac{dx}{e^x\sqrt{\sinh 2x}}$$

٣ - إثبت أن

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \ln (1/x)}} = \sqrt{2\pi}$$

٤ - إثبت صحة التكاملات الآتية:

$$(i) \quad \int_1^\infty x^{-p} (\ln x)^q \, dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(p-1)^{q+1}} \; , p>1 \, , q>-1$$

$$(ii) \quad \int_0^1 x^m (1-x^n)^p \, dx = \{\Gamma(\frac{m+1}{n}) \, \Gamma(p+1)\} \, \{n\Gamma(\frac{m+1}{n} + p+1)$$

$$for \; m > n-1 \, , p > -1$$

٥ - عبر عن

$$(i) \int_0^\infty e^{-ax^b} x^c \, dx \qquad (a>0 \, , b>0 \, , c>-1)$$

$$(ii) \int_1^\infty (\log x)^m x^{-n} \, dx \qquad (m>-1 \, , n>1)$$

$$(iii) \int_0^{\pi/2} (\tan^5 \theta + \tan^7 \theta) e^{-\tan^2 \theta} d\theta$$

بدلالة دالة جاما

٦ - إثبت أن

$$(6) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/n+1/2)} \; n>0$$

٧ – إثبت أنه إذا كان n عددا صحيحا موجبا فإن

$$(i) \quad \beta(m,n) = \frac{n-1}{m}\beta(m+1, n-1)$$

$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-1)}$$

$$(ii) \quad \beta(m+1,n) = \beta(m,n) - \beta(m,n+1)$$

$$(iii) \quad \beta(m,n+1) = \frac{n}{m+n}\beta(m,n)$$

٨ – إثبت أن

$$\Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n) = \frac{n\pi}{\sin n\pi}$$

٩ – إستخدم التحويل $xy=u\,,\ y=u+v$

لإثبات أن

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^{m-1}\,y^{m}\,(1-y)^{n-1}}{(1-xy)^{m+n-1}}\,dx\,dy = \beta(m,n)$$

١٠ – إثبت أن

$$(i) \quad \beta(p,q)\,\beta(p+q,r) = \beta(q,r)\,\beta(q+r,p)$$

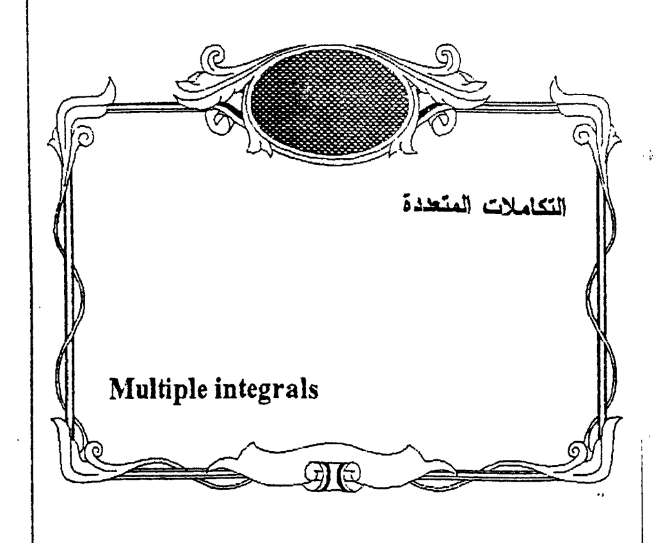
$$(ii) \quad \beta(p,p)\,\beta\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) = \pi/[2^{4p-1}p]$$

حيث p عدد طبيعي

١١ - أوجد

$$\int_0^{\infty} \sin x^n \, dx \quad , \quad \int_0^{\infty} \cos x^n \, dx \qquad n>1$$

١٢- إوجد قيم a,b حتى لايكون التكامل $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$ متباعدا


التكاملات المتعددة
Multiple integrals

نعلم أن التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$ هو نهاية مجموع. سوف نعمم هذا المفهوم على دالة متغيرين أو أكثر. للقيام بهذه العملية نحتاج للتعريفات الآتية:

١-٤ المجال (domain) والمنطقة (Region)

تسمى مجموعة A من النقط من فراغ مترى (X, d) مجموعة مفتوحة (open set) إذا كان لكل نقطة a من نقط المجموعة A يوجد عدد موجب δ بحيث تقع جميع نقط الفراغ التى تبعد عن a أقل من δ داخل المجموعة A.

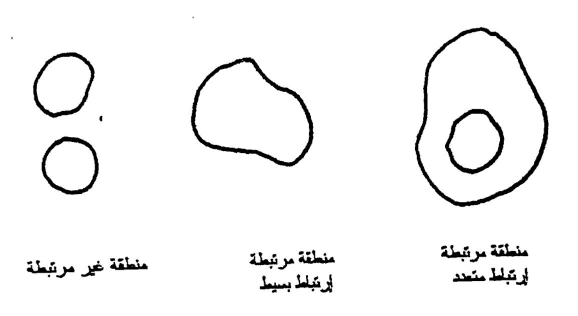
$$i.e.\ A\ is\ open \Leftrightarrow \forall a \in A\ \exists\ \delta > 0 : \{x : d(x,a) < \delta\} \subset A$$

تسمى الكرة المفتوحة $B_\delta^d(a)$ المكونة من جميع النقط x التي تبعد عن a مسافة أقل من δ جوارا أساسيا للنقطة a. بالتالى تكون مجموعة A مفتوحة إذا وجد جوار أساسى لكل نقطة من نقطها يقع بكامله داخل المجموعة A. تسمى نقطة b نقطة حدية (boundary) لمجموعة A إذا كان كل جوار للنقطة b يحتوى على نقطة من A ونقطة ليست من A. أى مجموعة تسمى مرتبطة إذا إستحال كتابتها على هيئة إتحاد مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين. نقول أن مجموعة مرتبطة إرتباطا مساريا إذا كان كل نقطتين من نقطها يمكن إيصالهما بمنحنى يقع بكامل نقطه فى المجموعة. سوف يعنينا فى هذا الباب الإرتباط المسارى فقط وللإختصار سوف نكتب مجموعة مرتبطة لنعنى أنها مرتبطة إرتباطا مساريا.

المجال هو مجموعة من النقط مفتوحة ومرتبطة. يكون المجال محدودا إذا أمكن إحاطته بمربع ذو أبعاد محدودة.

المنطقة هى مجموعة من النقط تتكون من مجال محدود مضاف إليه نقطه الحدية (مجموعة النقط الحديه تسمى حدا أو كنتورا (Contour).

نقول عن منطقة ما أنها مرتبطة إرتباطا بسيطا (simply connected) إذا كان أى منحنى بسيط ومغلق بداخلها يمكن أن ينكمش بشكل متصل إلى نقطة (للإنكماش تعريف فى الرياضيات المتقدمة ولكننا نعتمد على البديهة) داخل المنطقة. المنطقة المرتبطة التى إرتباطها غير بسيط تسمى متعددة الإرتباط (Multiply connected).

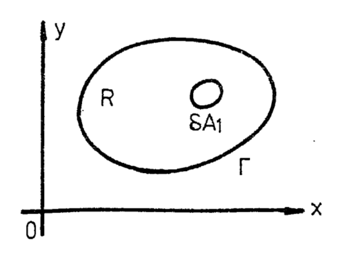


منطقة غير مرتبطة — منطقة مرتبطة إرتباط بسيط — منطقة مرتبطة إرتباط متعدد

٤-٣ التكاملات المساحية (Area Integrals)

تتشابة نظرية التكامل المتعدد من أوجه كثيرة مع نظرية التكامل المحدد لدالة المتغير الواحد. لذا سنبدأ بتعريف التكامل الثنائى حيث التعميم وارد للتكاملات المتعددة.

نفرض أن $f(x, y)$ دالــة وحيدة القيم ومتصلــة فـي منطقـة R مـــن مستوى x y ومغلقة بمنحنى Γ.



قسـم المنطـقة R إلى n مـن عناصـر المساحات { δA_i }. لكل عنصر مساحى δA_i (الرمز δA_i يستخدم كمنطقة ويستخدم كمساحة) نختار نقطة من نقطه (x_i, y_i). نكون المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \delta A_i$ فـي النهاية عندما تؤول n إلى مالانهاية بحيث تؤول أكبر مساحة $\delta A_{i\,max}$ إلى الصفر (أى عندما يزيد عدد عناصر تقسيم R بدون حد. بحيث يؤول أكبر عنصر مساحة إلى الصفر) فإن نهاية هذا المجموع إن وجدت بحيث لاتعتمد على طريقة تقسيم R أو كيفية إختيـار (x_i, y_i) تعرف تكامل الدالـة $f(x, y)$ على المنطقة R ونكتب

$$\lim \Sigma f(x_i, y_i)\, \delta A i = \int_R \int f(x, y)\, dA \qquad (1)$$

حيث تعنى lim أن $n \to \infty$ وأن $\max \delta A_i \to 0$

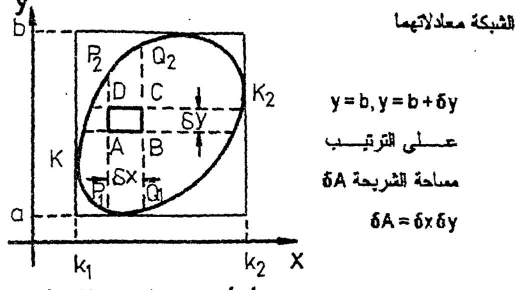
التكامل فى الطرف الأيمن من الصيغة (1) عرف كنهايـة مجموع كالحال عندما عـرف التكـامل المحـدد لـدالة المتغيـر الواحــد. فـى

الحالة الخاصة $f(x, y) = 1$ فإن $\iint dA$ يعطي بمساحة المنطقة R المغلقة بالمنحنى Γ.

إذا لم تكن $f(x, y)$ متصلة في المنطقة R فإن التكامل الثنائي يمكن ألا يتواجد ولكن لإن أمكن تقسيم R إلى عدد منتهي من المساحات تكون f فيها متصلة فإن التكامل يعرف (ويحسب) لكل مساحة على حده وتكون قيمة التكامل على R مساوية مجموع قيم التكاملات على مساحة التقسيم. تسمى المنطقة R حقل التكامل (field of integration)

*إذا لم تكن $f(x,y)$ منتهية أو إذا كانت R منطقة غير منتهية فإن التكامل الثنائي يعرف كالحال عند تعريف التكاملات المعتلة.

التقييم (الحساب) العملي للتكامل الثنائي يتطلب إستخدام نظام إحداثيات نقرر على هدية شريحة المساحة dA. سوف نعطي منهجا بديهيا لتقييم مثل هذه التكاملات. إذا إستخدمنا إحداثيات كارتيزية يمكننا أن نقسم حقل التكامل إلى مستطيلات بشبكة من الخطوط توازي محاور الإحداثيات. نفرض أن AD, BC خطان رأسيان من خطوط الشبكة معادلاتهما $x = a, x = a + \delta x$ على الترتيب وأن AB, DC خطان أفقيان من خطوط الشبكة معادلاتهما



$y = b, y = b + \delta y$

على الترتيب

مساحة الشريحة δA

$\delta A = \delta x \, \delta y$

نفرض (عند هذه المرحلة) أن أي خط يقطع غلاف (كنتور)

المنطقة فى نقطتين على الأكثر (أى أن المنطقة R مقعرة (convex))؛ فى المسائل العملية يمكن تقسيم المناطق الغير مقعرة إلى عدد منتهى من المناطق المقعرة).

يمكن كتابة التكامل كالآتى:

$$\int_R\int f\,dA=\lim\sum_{\delta x}\sum_{\delta y}\left[f(x,y)\,\delta x\,\delta y\right]$$

$$=\lim\sum_{\delta x}\left\{\sum_{\delta y}f(x,y)\,\delta y\right\}\delta x \qquad (2)$$

لإجراء الجمع فى (2) يجب أن نتخذ منهجا ملائما ومنظما للجمع. حيث أن أى حد فى الجمع يناظره عنصر مساحة. لذا وجب بناء عناصر المساحة بدءا بعنصر ما حتى يكتمل حقل التكامل. يمكن أن نبدأ بناء عناصر المساحة ABCD على الشريحة $P_1Q_1Q_2P_2$. يكون الجمع بالنسبة إلى δy (على هذه الشريحة يبقى كل من x وكذلك δx ثوابت). فى النهاية، يعطى الجمع بالتكامل المحدد.

$$\lim\sum_{\delta y}f(x,y)\,\delta y=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,dy=F(x)\quad say, \qquad (3)$$

حيث $y_1(x), y_2(x)$ هما قيم y عند P_1,P_2 على التوالى. (لاحظ أن كل من $\delta X\,\delta Y$ متناهية فى الصغر). الخطوة التالية من الجمع الثنائى هى جمع شرائح مثل $P_1Q_1Q_2P_2$ لتغطية المساحة كلها. فى النهاية نحصل على تكامل آخر بالنسبة إلى x.

$$\lim\sum_{\delta x}F(x)\,\delta x=\int_{k_1}^{k_2}F(x)\,dx=\int_R\int f(x,y)\,dA \qquad (4)$$

حيث k_1, k_2 هى قيم x المتطرفة عند K_1, K_2 على التوالى.

وهكذا

$$\int_R \int f(x,y)\ dA = \int_{k_1}^{k_2} [\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\ dy]\ dx \qquad (5)$$

يمكن أيضا إجراء التكامل الثنائي متعاقبا بالجمع أولا في إتجاه متغير x ثم بعد ذلك في إتجاه متغير y لنحصل

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\ dx\, dy$$

التعبير في الطرف الأيمن يسمى تكاملا متعاقبا ويمكن كتابته بالهيئة

$$\int_R \int f\, dA = \int_{k_1}^{k^2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\ dy \qquad (6)$$

وأحيانا

$$\int_R \int f\, dA = \int_{k_1}^{k^2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\ dy\, dx \qquad (7)$$

ليس هناك إرتباطات ضرورية بين موضوع التكامل f(x,y) وحقل التكامل R سوى قابلية الدالة للتكامل عليه.

للتكامل الثنائي معنى هندسي بسيط إذ أن حاصل الضرب f(x, y) dA يمثل حجم المنشور الذى مساحة قاعدته dA وإرتفاعه z = f(x, y) وعليه فإن عملية التجميع (التي تتم عن طريق التكامل) تمثل الحجم المحصور بين منطقة التكامل في مستوى xy والسطح z = f(x, y) وسطحه الجانبي هي رواسم توازى محور z.

للتكامل الثنائي معان فيزيائية عديدة ترتبط بالمعنى الفزيائي للدالة f(x, y). إذا كانت f(x, y) تمثل كثافة سطحية أعطى التكامل الثنائي كتلة منطقة التكامل. إذا مثلت f(x, y) درجة حرارة عند نقطة (x, y) أعطى التكامل الثنائي كمية حرارة وهكذا.

?

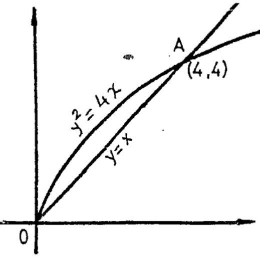
مثال ١:

$$\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} (28x^2+24xy)\,dy=\int_0^4 [28x^2y+12xy^2]_x^{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$=\int_0^4 [28x^{5/2}-40x^3+48x^2]\,dx$$

$$=[8x^{7/2}-10x^4+16x^3]_0^4$$

$$=1024-2560+1024=-512$$



حقل التكامل فى هذا المثال هو المنطقة المحدد بالمنحنيات

$y^2=4x,\ y=x$

مثال ٢:

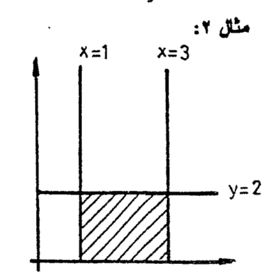
$$\int_1^3 dx\int_0^2 x^2y\,e^{x+2y}\,dy$$

$$=\int_1^3 x^2e^x\,dx\int_0^2 y\,e^{2y}\,dy$$

$$=[x^2e^x-2xe^x+2e^x]_1^3$$

$$[\frac{1}{2}ye^{2y}-\frac{1}{4}e^{2y}]_0^2$$

$$=\frac{1}{4}(5e^3-e)(3e^4-1)$$



حقــل التكامــل فى هــذا المثــال هــو داخــل وحــدود المستطيل

$x=1,\ x=3,\ y=0,\ y=2$

التكامل السابق يعطى مثالا لتكامل ثنائى قابل للفصل. بمعنى أنه يمكن كتابته على هيئة ضرب تكاملين، فيه موضوع التكامل يساوى حاصل ضرب دالتين أحدهما دالة فى x فقط والأخرى دالة فى y فقط كما أن نهايات التكامل مقادير ثابتة.

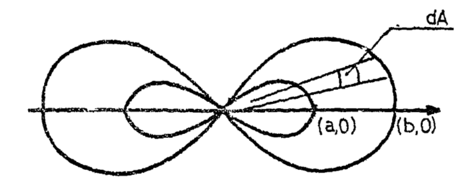
$$\int_c^d\int_a^b f(x)g(y)\,dx\,dy=\int_a^b f(x)\,dx*\int_c^d g(y)\,dy$$

مثل ١:

لإيجاد المساحة بين منحنيي اللمنسكيت

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad , \quad r^2 = b^2 \cos 2\theta \quad b > a$$

حقل التكامل موضح بالشكل. من المناسب أن نعتبر شريحة مساحة $dA = r\,d\theta\,dr$ مناسبة للإحداثيات القطبية.



بأخذ تماثل المساحة حول الخط الإبتدائي وكذلك حول القطب بعين الإعتبار يمكن حساب المساحة في الربع الأول فقط

$$A = \int_R\int dA = 4\int_0^{\pi/4}\int_{a\sqrt{\cos 2\theta}}^{b\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\,[b^2\cos 2\theta - a^2\cos 2\theta]\,d\theta$$

$$= 2\,(b^2 - a^2)\,\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = (b^2 - a^2)$$

٣-٤ خواص التكامل الثنائي

سوف نذكر الخواص الأولية للتكامل الثنائي

$$i \quad \int_R\int dA = A$$

$$ii \quad \int_R\int kf\,dA = k\int_R\int f\,dA$$

$$iii \quad \int_r\int (f \pm g)\,dA = \int_R\int f\,dA \pm \int_R\int g\,dA$$

$$IV \quad R=R_1+R_2 \Rightarrow \int_R\int f\,dA=\int_{R_1}\int f\,dA+\int_{R_2}\int f\,dA$$

$$V \quad f(x,y)\le g(x,y)\Rightarrow \int\int_R f\,dA\le\int\int_R g\,dA$$

$$VI \quad \left|\int\int_R f\,dA\right|\le\int\int_R |f|\,dA$$

$$VII \quad \left|\int\int_R f\,dA\right|\le \max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|\,A$$

إذا كانت الدالة f(x, y) زوجية فى x وكانت منطقـة التكـامل متماثلـة حول محور y فإن

$$\int_R\int f(x,y)\,dx\,dy=2\int\int_{R+} f(x,y)\,dx\,dy$$

حيث R_+ هو جزء منطقة التكامل حيث $x > 0$

إذا كانت f(x, y) فردية فى x وكانت منطقة التكـامل متماثلـة حـول محور y فإن

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy=0$$

بصورة مطابقة – يجرى الحديث عن التمـاثل حـول محـور x.إذا كانت منطقة التكامل متماثلة حول محورى الإحداثيات وكانت f دالة زوجية فى كل من x,y فإن

$$\int_R\int f(x,y)\,dx\,dy=4\int\int_{R'} f(x,y)\,dx$$

حيث 'R هى المنطقة من R والتى فيها $x > 0, y > 0$ بينما

$$\int_R\int f(x,y)\,dxdy=0$$

إذا كانت f فردية فى أحد المتغيرين

*إذا كانت $f(x,y)$ حاصل ضرب دالتين إحدهما دالة فى x فقط والأخرى دالة فى y فقط وكانت نهايتا التكامل ثوابت أمكن التعبير عن التكامل الثنائى بهيئة حاصل ضرب تكاملين كل منهما دالة متغير واحد والعكس صحيح.

$$\text{i.e.}\ \int_a^b\int_c^d f(x)g(y)dx\,dy = \int_c^d f(x)dx \int_a^b g(y)dy$$

مثال: لإيجاد $I = \int_c^d\int_a^b \frac{xy}{1+x^2+y^2+x^2y^2}dx\,dy$ نعتبر

$$I = \int_c^d\int_a^b \frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}dx\,dy = \int_c^d \frac{ydy}{1+y^2}\int_a^b \frac{xdx}{1+x^2}$$

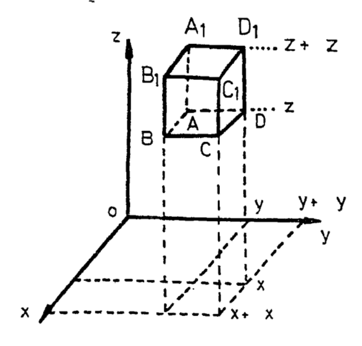
$$= ½ \ln\left[\frac{1+d^2}{1+c^2}\right].½\ln\left[\frac{1+b^2}{1+a^2}\right]$$

٤-٤ للتكاملات الحجمية (Volume Integrals)

سوف نعمم عملية التكاملات المساحية إلى تكاملات حجمية. نعتبر دالة موضع $f(x, y, z)$ حيث (x, y, z) هي إحداثيات نقطة منسوبة لنظام إحداثيات كارتيزية. نفرض أن هذه الدالة وحيدة القيم ومتصلة على منطقة مقعرة R محاطة بسطح $\Phi(x, y, z) = c$. الحالات التي فيها R غير مقعرة أو أن للدالة بعض مواضع عدم إتصال يمكن أن تعالج كما هو الحال في التكاملات المساحية. قسم المنطقة R إلى n من العناصر الحجمية الصغيرة $\{\delta V_i\}$. نختار نقطة (x_i, y_i, z_i) من كل شريحة حجمية δV_i. نكون الجمع $\Sigma f(x_i, y_i z_i)\, \delta V_i$ مأخوذا على جميع العناصر الحجمية. يعرف التكامل الحجمى أو الثلاثى على المنطقة R بأنه القيمة النهائية للجمع عندما تؤول n إلى مالانهاية وتؤول لأكبر شريحة حجم δV_{max} إلى الصفر حيث نكتب

$$\lim \Sigma f \delta V = \iint_R \int f\, dV \qquad (8)$$

حيث تعنى lim أن $\delta V_{max} \to 0$ عندما تؤول n إلى مالانهاية



يتم حساب التكامل الحجمى بتعميم طريقة التكامل المساحى.

بإستخدام نظام إحداثيات كارتيزية. نقسم المنطقة R إلى شبكة من العناصر الحجمية بمستويات $x = const,\ y = const,\ z = const$ مثل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ أطوال أحرف هذا العنصر هى $AB = \delta x,\ BC = \delta y,\ AA_1 = \delta z$ وبذا فإن $\delta V = \delta x\, \delta y\, \delta z$. من ثم

$$\iint_R\int f(x,y,z)\, dV = \lim_{\delta x\, \delta y\, \delta z} \Sigma\, \Sigma\, \Sigma\, f(x,y,z)\, \delta x \delta y \delta z \qquad (9)$$

والنهاية lim هنا تعنى أن جميع $\delta x_{max}\ \delta y_{max}\ \delta z_{max}$ تؤول إلى الصفر عندما يزيد عدد العناصر المساحية بدون حد. يجرى الجمع الثلاثى ببناء الحجوم بطريقة منتظمة لملأ المنطقة R يمكن مثلا التجميع على δz لتكوين عمود بحيث يقطع أسفل العمود سطح المنطقة R فى نقطة $z_1(x, y)$ ويقطع أعلى العمود السطح فى نقطة $z_2(x, y)$ ناتج هذا الجمع هو $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz$ وفيه x, y ثوابت. يمكن إستكمال الجمع لأمثال الأعمدة السابقة لعمل مقطع مستوى فى حقل التكامل يوازى yz مثلا.

بدءا بأول عمود والذى فيه الإحداثي y هو دالة y_1 من x منتهيا بالعمود الأخير وفيه الإحداثى y هو أيضا دالة $y_2(x)$.ناتج الجمع فى النهاية هو تكامل بالنسبة إلى y وفيه x ثابت. أعنى

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x,y)} \{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\}\, dy,$$

الخطوة الأخيرة فى الجمع تتكون من تجميع أمثال هذه المقاطع المستوية حتى يغطى حقل التكامل. إذا كانت $x_1,\ x_2$ هى القيم المتطرفة للإحداثى x على السطح فإن المحصلة النهائية تساوى

$$\iint_R\int f\,dV=\int_{x_1}^{x_2}\{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\}dy\}\,dx \qquad (10)$$

أى الرموز الآتية يمكن إستعمالها

$$\iint_R\int f(x,y,z)\,dV=\iint_R\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

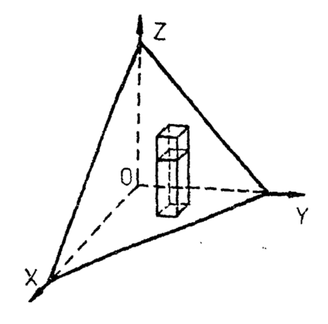
$$=\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \qquad (11)$$

مثال ٤:

لإيجاد $\iint_R\int 72xyz\,dV$ حيث R هى المنطقة المحددة بالمستويات $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$

نرى أن المنطقة محددة من أعلى ومن أسفل بالمستويات $z=1-x-y,\ z=0$ ومسقطها على مستوى xy هو منطقة D عبارة عن مثلث محدد بالمستقيمات $x=0,\ y=0,\ y=1-x$



من ثم فإن التكامل الحجمى يعطى من

$$\iiint f(x,y,z)\,dV=\iint_D [\int_0^{1-x-y} 72xyz\,dz]\,dA$$

$$=\iint_D 72\,xy\,[z^2/2]_0^{1-x-y}\,dA$$

$$=\int_0^1 [\int_0^{1-x} 36\,xy\,(1-x-y)^2\,dy]\,dx$$

$$=\int_0^1 3x\,(1-x)^4\,dx=0.1$$

يجب أن نلاحظ أن المرحلة الأولى فى التكامل الحجمى ونعنى بها التكامل بالنسبة إلى z تختزل هذا التكامل المتكرر إلى تكامل ثنائى على المساحة الناتجة من الإسقاط العمودى على مستوى xy.

مثال ٥:

إذا كانت $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ثوابت فإن التكامل الثلاثى المنفصل الآتى يمكن أن يكتب

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,g(y)\,h(z)\,dz=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \int_{y_1}^{y_2} g(y)\,dy \int_{z_1}^{z_2} h(z)\,dz$$

أى يمكن أن يكتب بهيئة حاصل ضرب ثلاث تكاملات

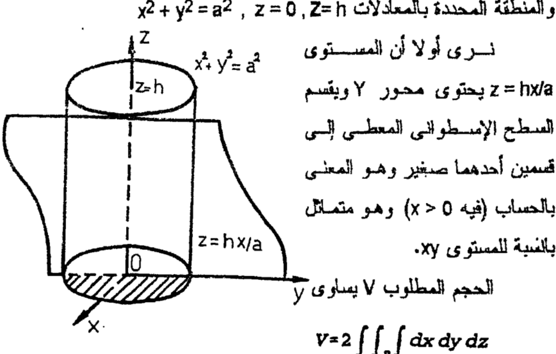
على سبيل المثال

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty xyz\,e^{-(x+y+z)}\,dz=(\int_0^\infty xe^{-x}\,dx)^3=1$$

مثال ٦:

لإيجاد حجم المنطقة الأصغر المحصورة بين المستوى $z = hx/a$

والمنطقة المحددة بالمعادلات $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $Z = h$



نرى أولا أن المستوى $z = hx/a$ يحتوى محور Y ويقسم السطح الإسطوانى المعطى إلى قسمين أحدهما صغير وهو المعنى بالحساب (فيه $x > 0$) وهو متماثل بالنسبة للمستوى xy.

الحجم المطلوب V يساوى

$$V = 2\iint_R\int dx\, dy\, dz$$

حيث مسقط شريحة الحجم $dv = dx\, dy\, dz$ على المستوى yz أى dy dz يقع فى الربع الأول من المستوى $z = 0$.

$$V = 2\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\int_0^{hx/a} dz = 2\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} hx/a\, dy$$

$$= \frac{2h}{a}\int_0^a x[y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{2h}{a}\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{2/3}\right]_0^a$$

$$= \frac{2h}{3}a^2$$

مثال ٧:

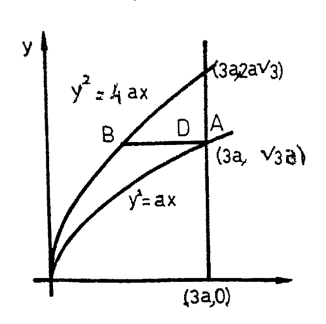
لإيجاد الحجم فى الثمن الأول الواقع داخل السطح $y^2 + z^2 = 4ax$ وخارج $y^2 = ax$ ومقطوع بالأسطح $x = 3a$, $z = 0$.

نلاحظ أن السطح $x^2 + z^2 = 4ax$ هو سطح دورانى ناتج من دوران القطع $y^2 = 4ax$ حول محور x (معادلة السطح الدورانى الناتج من

دوران المنحنى $z=0,\ \phi(x,y)=0$ حول محور y هى $\phi(\sqrt{x^2+z^2},\ y)=0$

أما المسطح $y^2=ax$ فهو سطح إسطوانى رواسمه توازى محور z. بهذا يكون مسقط الحجم المطلوب على مستوى xy محصور بين المنحنيات

$$z=0\ ,\ y^2=ax\ ;\ z=0\ ,\ y^2=4ax\ ;\ x=3a\ ,\ z=0$$



$$V=\int\int_R z\, dy\, dx=\int_0^{3a}\int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}}\sqrt{4ax-y^2}\, dy\, dx$$

بوضع $y=\sqrt{4ax}\sin\theta$ نحصل على

$$V=\int_0^{3a}dx\int_{\pi/6}^{\pi/2}4ax\cos^2\theta\, d\theta=\int_0^{3a}dx\int_{\pi/6}^{\pi/2}2ax\,(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$=\int_0^{3a}2ax\,[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}]_{\pi/6}^{\pi/2}\, dx$$

$$=\int_0^{3a}3ax\,[\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}]\ dx=9a^3\,(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$=\frac{1}{4}\,(12\pi-9\sqrt{3})\, a^3.$$

تمارين ١

إحسب التكاملات الآتية

1- $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 4xy \, dx \, dy$ $\qquad$ $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy \, dx$

2- $\int_0^e \int_0^{\ln y} y/x \, dx \, dy$ $\qquad$ $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+2y) \, dx \, dy$

3- $\int_0^\pi \int_0^{\sin x^2} x \, dy \, dx$

4- $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{y} (x+y^2) \, dx \, dy$

5- $\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{x^2+y^2} y \, dz \, dx \, dy$

إرسم المناطق الآتية

(i) $|x + y| \le 1$, $\qquad$ (ii) $x^2 - y^2 + 2y \le 1$

(iii) $x + y - 1 \ge 0$, $\qquad$ $|x| \le 1, \ |y| \le 1$

إرسم مناطق التكامل ثم أوجد قيم التكاملات

6- $\int_0^\pi \int_0^{\sin x} x^2 y \, dy \, dx$ $\qquad$ $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sec x} y^3 \, dy$

7- $\int_0^1 \int_0^{e^y} y \, dx \, dy$ $\qquad$ $\int_0^{\pi/2} \int_{-y}^{y} \sin x \, dx \, dy$

8- $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a\cos\theta}^{a} r \cos\theta \, dr$ $\qquad$ $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos y} x \sin y \, dx \, dy$

إحسب قيم التكاملات الآتية على المناطق D المحصورة بالمنحنيات قرين كل منها

9- $\iint_D e^{ax+by} \, dx \, dy$ $\qquad$ $D: x=0 , y=0 , ax+by=1 \ (a>0 , b>0)$

10- $\iint_D xy\,dx\,dy \qquad D: y=x,\ y=a,\ x+2y=5a$

11- $\iint_D x^2\,dx\,dy \qquad D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

12- $\iint_D \sin\left(\frac{x}{a}\right) dx\,dy \quad (a,b>0) \quad D: 0\le x\le \frac{\pi a}{2},\ 0\le y\le \frac{\pi b}{2}$

$\iint_D x^3 y^2\,dx\,dy \qquad D: y=\pm 3(x-2)\ ,\ y=\pm 3(x-4)$

13- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta} r^3 \sin^2\theta\,dr$

14- $\iiint_D dx\,dy\,dz \qquad D: az=xy,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=a$

15- $\iiint_D e^{p(x/a+y/b+z/c)}\,dx\,dy\,dz \qquad D: x=0,\ y=0,\ z=0$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0)$

16- $\iiint_D x^2 z\,dx\,dy\,dz \qquad D: z=0,\ z=h,\ x^2+y^2=a^2$

١٧ - إثبت أن $\iint_D f_{xy}\,dx\,dy$ على المستطيل

$x_0\le x\le x_1\ ,\ y_0\le y\le y_1$

تساوى

$f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)-f(x_1,y_0)+f(x_0,y_0)$

١٨- إحسب التكاملات الآتية

$\iint_R e^{-|x|-|y|}dxdy,\ \iint_R e^{-|x+y|}dxdy,$

حيث R هى المنطقة داخل المربع $x=\pm a,\ y=\pm a$

٥-٤ تبديل ترتيب التكامل

تـم تقيـيم التكـامل الثـنائى $\int_R\int f(x,y)\,dA$ بإيجـاد نهايــة المجموع:

$$\Sigma f(x,y)\,\delta x\,\delta y=\sum_{\delta x}\left(\sum_{\delta y} f\,\delta y\right)\delta x$$

عن طريق إيجـاد نهايتـا الجمـع بالتعـاقب، أولا بـالنسـبة إلـى y فـى إتجاه شريحة مساحة رأسية ثم نهاية مجموع أمثـال هذه الشرائـح الرأسية لمسح حقل التكامل ونكتب

$$\int_R\int f\,dA=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,dy$$

يمكن كتابة الجمع الثنائى فى الهيئة $\sum_{\delta y}\left(\sum_{\delta x} f(x,y)\,dx\right)dy$. حيث يجرى الجمـع أولا بالنسبة إلـى x لإيجـاد الجمـع فـى إتجـاه شـريحة مساحة أفقية، يلـى ذلـك الجمـع فـى إتجـاه y لأمثـال الشـريحة الأفقيـة. فـى النهاية يعكس ترتيب إجراء الجمع (التكامل) لنحصل على

$$\int_R\int f(x,y)\,dA=\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,dx \qquad (12)$$

حيث $x_1(y), x_2(y)$ هما أدنـى وأقصـى قيم x علـى إمتداد شـريحة مساحة أفقية ناتجة من الجمع فى إتجاه x بينما y_1, y_2 هما أدنى وأقصى قيم المتغير y فى حقل التكامل. عند إجراء التكامل بالنسبة إلى x يعامل المتغير y معاملة الثابت.

فى بعض الأحوال يؤدى تبديل ترتيب التكامل إلـى إختصـار كبير للجهد عند تقييم التكاملات. فى المسائل الخاصة التى تتطلـب تبديـل ترتيـب التكامل فإنه، من المعتاد أن نرسـم بعنايـة حقل التكـامل كـى نتعـرف علـى نهايات التكامل. من الممكن كذلك أن نعيد تبديل ترتيب تكاملات ثلاثيـة مـع ملاحظة أن هناك ست طرق مختلفة فى هذه الحالة.

مثال ٨:

لتبديل ترتيب التكامل

$$I=\int_{-1}^{1} dx\int_{x^2}^{1} f(x,y)\, dy$$

نتعرف أولا على حقل التكامل والمعرف بالمنحنيات

$$y=x^2 \ , \ y=1$$
$$x=-1 \ , \ x=1$$

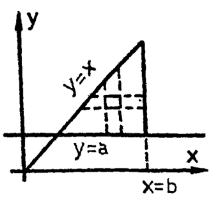
يمكن تبديل ترتيب التكامل كالآتي:

$$I=\int_{0}^{1} dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx$$

مثال ٩:

لإثبات أن $\int_{a}^{b} dx\int_{a}^{x} f(x,y)\, dy=\int_{a}^{b} dy\int_{y}^{b} f(x,y)\, dx$

نحتاج للتعرف على حقل تكامل الطرف الأيسر لتبديل ترتيب التكامل.



حقل التكامل معرف بالمنحنيات $y = a, y=x, x=a, x=b$ بتبديل ترتيب التكامل نحصل على المطلوب.

مثال ١٠:

لإيجاد $I=\int_{0}^{2} dy\int_{y}^{2} y\sqrt{1+x^3}\, dx$

نلاحظ تعذر إيجاد التكامل بالنسبة إلى x أولا. بالتعرف على حقل التكامل $(x=y, x=2, y=0, y=2)$ وتبديل ترتيبه نحصل على

$$I=\int_0^2 dx\int_0^x y\sqrt{1+x^3}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^2 [y^2]_0^x \sqrt{1+x^3}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx=\frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}(1+x^3)^{3/2}\right]^2=3$$

مثال ١١:

أوجد $\int_0^1 dy\int_{\cos^{-1}y}^{\pi/2}\sin^8 x\,dx$

بعد تعديل ترتيب التكامل.

نتعرف أولا على حقل التكامل وهو نصف عقد من منحنى الدالة $y=\cos x$

ومعرف بالمعادلات

$y=\cos x,\ x=\pi/2,\ y=1$

بتبديل ترتيب التكامل نحصل على

$$\int_0^1 dy\int_{\cos^{-1}y}^{\pi/2}\sin^8 x\,dx=\int_0^{\pi/2}dx\int_{\cos x}^1 \sin^8 x\,dy$$

$$=\int_0^{\pi/2}[y]_{\cos x}^1\sin^8 x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(1-\cos x)\sin^8 x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\sin^8 x-\cos x\sin^8 x)\,dx$$

$$=\frac{7}{8}\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\left[\frac{\sin^9}{9}\right]_0^{\pi/2}=\frac{35}{265}\pi-\frac{1}{9}$$

مثال ١٢:

إذا كانت $f(x) \in C$ وكانت

$$f^{(0)} = f(x)\ ,\ f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x f^{(-n)}(t)\,dt$$

فإثبت أن

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$$

لإثبات صحة العلاقة المطلوبة سوف نستخدم مبدأ الإستنتاج الرياضى على r لإثبات أن

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^r}{r!} f^{(-n+r)}(t)\,dt \quad 0 \le r \le n \qquad *$$

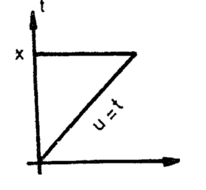
العلاقة صحيحة عند $r = 0$ (من المعطيات). نفترض صحة العلاقة عند $r = k$. أى أن

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(-n+k)}(t)\,dt.$$

سوف نثبت صحة العلاقة عند $r = k + 1$

$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} \left(\int_0^t f^{(-n+k+1)}(u)\,du\right) dt$$

بتبديل ترتيب التكامل حيث تعرف منطقة التكامل بالمعادلات $u = t\ ,\ u = 0\ , t = x$ يتحول التكامل إلى الهيئة



$$f^{(-n-1)}(x) = \int_0^x \left(\int_u^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(-n+k+1)}(u)\,dt\right) du$$

$$=\int_0^x [-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}]_u^x f^{(-n+k+1)}(u)\,du$$

$$=\int_0 \frac{(x-u)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(-n+k+1)}(u)\,du$$

أى أن العلاقة • صحيحة عند $r = k + 1$ وبذا يثبت المطلوب.

ليس من المحتم تساوى التكاملات الثنائية بعد تبديل ترتيب التكامل. هذا الحال يشبه جمع المتسلسلات الثنائية حيث ليس بالضرورة يتساوى الجمع على الصفوف أولا ثم على مجموع الأعمدة مع الجمع بترتيب معكوس. لتواجد التكامل الثنائى ومساواته أى من التكاملين المتعاقبين شروط هى: أن تكون الدالة $f(x, y)$ موضع التكامل معرفة ومحددة على منطقة التكامل D وأن تكون متصلة على نقطها الداخلية.

المثال الآتى يعطى تكاملا ثنائيا ليس له وجود (موضوع التكامل لانهائى عند (0,0)) إذ تختلف قيمتى التكامل بالتعاقب

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x+y-2y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 [\frac{-1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2}]_0^1\,dy$$

$$=\int_0^1 [\frac{-1}{1+y} + \frac{y}{(1+y)^2}]\,dy = \int_0^1 -\frac{1}{(y+1)^2}\,dy = -\frac{1}{2}$$

بينما

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx = \frac{1}{2}$$

تمارين ٢

١ – بدل ترتيب التكامل في التكاملات الثنائية الآتية مع رسم حقل التكامل

a) $\int_{-2}^{0} dx \int_{x}^{x^2} f(x,y)\, dy$ b) $\int_{a}^{a\sqrt{2}} dy \int_{\cos^{-1}(a/y)}^{\pi/4} f(x,y)\, dx$

c) $\int_{0}^{\pi/2} d\theta \int_{0}^{\cos\theta} r f(r,\theta)\, dr$ d) $\int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\, dy$

٢ – بتبديل ترتيب التكامل

(i) $\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{a-\sqrt{a^2-x^2}} \frac{xy \ln(y+a)}{(y-a)^2}\, dy$, (ii) $\int_{0}^{a}\int_{x}^{a} \frac{4y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$

حيث $a > 0$ إحسب قيمته

٣ – أوجد (بتبديل ترتيب التكامل)

(i) $\int_{0}^{\infty} dy \int_{y}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$ (vi) $\int_{0}^{1} dx \int_{x^3}^{1} \frac{x^2 y}{4+y^3}\, dy$

(ii) $\int_{0}^{a} dx \int_{x}^{a} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy$ (vii) $\int_{0}^{1} dy \int_{y^2}^{1} y\, e^{x^2}\, dx$

(iii) $\int_{a/2}^{a} dx \int_{x}^{a} \frac{x\, dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ (viii) $\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{1} \frac{1}{y} \sin y \cos \frac{x}{y}\, dy$

(iv) $\int_{0}^{2} dy \int_{y^2}^{4} y \cos x^2\, dx$

(v) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} (1+2y-y^2)^{1/2}\, dy$ (ix) $\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{x} \frac{\cos y\, dy}{\sqrt{(a-y)(a-x)}}$

٤ – بعكس ترتيب التكامل إثبت أن

(i) $\int_{0}^{a} x\, dx \int_{0}^{x} (a^2-y^2)^{1/2} (x^2-y^2)^{1/2}\, dy = \frac{8}{45} a^5$

$$(ii)\quad \int_0^{\infty} dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \frac{dy}{(1+y^3)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

$$(iii)\int_0^{1} dx \int_x^1 \frac{2x\,dy}{2x^2+y^2+1} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{4\sqrt{3}-9}{36}\pi$$

$$(iv)\quad \int_0^{1/2} dy \int_y^{1/2} y^2 \sin(2\pi x^2)\,dx = 1/(24\pi)$$

٥ – بتبديل ترتيب التكامل ثم التعويض $y=(1-x)\sin^2 t$ إثبت أن

$$\int_0^2 dy \int_{-1}^{1-y} x^{1/3} y^{-1/2} (1-x-y)^{-1/2}\,dx = -3\pi/7$$

٦ – بعكس ترتيب التكامل إثبت أن

$$(i)\quad \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x}} \frac{dy}{(x+y)^2} = 1-\frac{2}{5}\ln\left[\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right]$$

$$(ii)\quad \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y\,(2x+1)\,(x^2+y^2)^k\,dx = \frac{1}{2(k+1)}\left[\frac{2^{k+2}-1}{k+2} - \frac{1}{2k+3}\right]$$

حيث k ثابت موجب.

٧ – إثبت أن

$$\int_0^x \left[\int_0^v \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du\right] dv = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$$

٨ – وضح أن التكاملات الآتية غير قابلة لتبديل الترتيب

$$(i)\quad \int_0^1 \int_1^{\infty} [e^{-xy} - 2e^{-2xy}]\,dy\,dx$$

$$(ii)\quad \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

٦-٤ إستبدال المتغيرات (Change of variables)

إستبدال المتغيرات في تكامل محدد $\int_a^b f(x)\,dx$ يتم بتعويض $x=\phi(u)$ الدالة $\phi(u)$ يجب أن تختار بحيث لا تنعدم $\phi'(u)$ أو تزيد بدون حد في فترة التكامل وكذلك يجب أن تكون الدالة $\phi(u)$ وحيدة القيم وأن تكون على وتيرة واحدة بالضبط (strictly monotonic) على مقاطع في ذات فترة التكامل.

كما هو الحال في التكامل المحدد فإن إستبدال المتغيرات في التكاملات المتعددة غالبا ما يبسط حسابها وفي هذه الحالة فإن شروطا يجب تحققها في دوال التعويض مثل حالة دالة المتغير الواحد. في حالة التكامل الثنائي نضع تعويضا بالهيئة

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \tag{13}$$

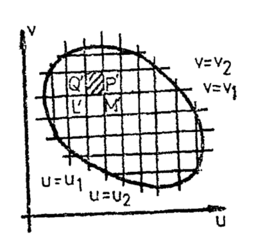
الشروط المناظرة لمشتقة دالة المتغير الواحد هي شروط على جاكوبيان التحويل وهي وجوب عدم إنعدامه

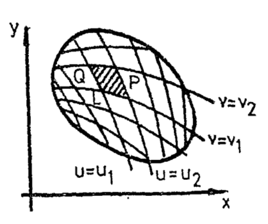
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

لجميع نقط حقل التكامل R. كما أن الدوال $x(u, v)$, $y(u, v)$ يجب أن تكون وحيدة القيم. هذه الشروط تستوجب أن يكون للتحويل معكوسا أي أنه توجد دوال وحيدة القيم تعطى u, v كدوال من x, y:

$$u = u(x, y), \quad v=v(x, y) \tag{14}$$

حيث أن $\iint_R f(x,y)\,dA$ لايعتمد على شكل عنصر المساحة δA من ثم يمكن إستخدام عائلات المنحنيات u = constant and v = constant لتقديم شبكة على حقل التكامل وإستخدام عناصر مساحية من هذه الشبكة.





نعتبر نظام للإحداثيات المتعامدة uv. كل نقطة P(x,y) فى مستوى xy يقابلها نقطة واحدة فقط P'(u, v) فـى مستوى uv تعين من المعـادلات (14). وعليه فإن المنطقة R فى مستوى xy يقابلهـا منطقـة R' فـى مستوى uv. أى خط مستقيم u = const. فى المنطقة R' يقابله منحنى ما فى المنطقة R. بالمثل مع أى خط مستقيم v = const.

أى تقسيم للمنطقة R' بخطوط v = const, u = const يقابلـه تقسيم للمنطقة R بمنحنيات. نعتبر فـى مستوى uv مساحة مستطيلة δA' محددة بالمستقيمات

$$u = const., \quad u + \Delta u = const., \quad v = const., \quad v + \Delta v = const.$$

ونعتبر أيضا المنطقة الجزئية المنحنية δA المقابلة لها فى مستوى xy.

بوجه عام تختلف المساحة $\delta A' = \Delta u \quad \Delta v$ عن نظيرتها δA.

لحساب المساحة δA المناظرة للمساحة δA'، نفرض أن قيم u, v المناظرة للنقط P', Q', L', M' هى

$$P'(u, v) \quad , \quad Q'(u+\Delta u, v) \quad , \quad L'(u+\Delta u, v+\Delta v) \quad , \quad M'(u, v+\Delta v)$$

الإحداثيات الكارتيزية للنقط P, Q, L, M فى مستوى xy والمناظرة للنقط P', Q', L', M' والصحيحة حتى حدود الدرجة الأولى فى Δu , Δv هى

$$P(x, y) \quad , \quad Q\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u ,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right)$$

$$L\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v ,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right) ,$$

$$M\left(x+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v ,\ y+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right) .$$

المتجهات المناظرة للإزاحات ترتبط بالعلاقة $\vec{PL} = \vec{PQ} + \vec{PM}$ والذى يعطى أنه فى حدود التقريب حتى حدود الدرجة الأولى فإن PQLM هو متوازى أضلاع مساحته تعطى من

$$\delta A = |\vec{PQ} X \vec{PM}| = \left|\left(i\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+j\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right) X\right.$$

$$\left. X\ \left(i\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v+j\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right)\right|$$

$$= |x_u y_v - y_u x_v|\Delta u \Delta v$$

$$= \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|\Delta u \Delta v$$

عند التعويض بالمتغيرات الجديدة تتحول الدالة f(x, y) إلى دالة g(u, v) ونحصل على

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_{R'}\int g(u, v)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv \qquad (15)$$

التكــــامل فــى الطـــرف الأيســـــر يجـــرى علـــى المنطقـــة R.
التحـويلان (13) ,(14) يعـرفان لكل نقطة P فى مســتوى xy نقطـة مناظرة ... مســتوى uv والعكس. هذا التناظر يحدد للمنطقة R فـي مســتوى xy صورة 'R في مستوى uv. وهكذا بدلا مــن النظـر إلـى المعادلات (14), (13) علـى أنهــا تعويض لإجراء تكـامل ننظـر إليها علـى أنها تحويلات للتكامل $\int_R\int f(x,y)\,dA$ على منطقة R من مستوى xy إلى تكامل

$$\int_{R'}\int g(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

على منطقة 'R من مستوى uv.

مــن المهم أن نلاحظ أنه عند إجراء مثل هذا التحويل فإن الحـد dx dy لا يتحول بكتابة

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv \quad , \quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$$

ثم ضرب هذه المقادير.

كحالـة خاصـة نعتبر التحويـل مــن الإحداثيـات الكارتيزيـة إلــى الإحداثيات القطبية

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

فى هذه الحالة

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$\int_R\int f(x,y)\,dx\,dy=\int_R\int f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

نوجز خطوات تبديل المتغيرات فى التكامل الثنائى فيما يلى :

١. تبديل موضوع التكامل إلى المتغيرات الجديدة.

٢. تعيين عنصر التكامل الجديد والذى يترجم إلى حساب جاكوبيان التحويل.

٣. تعيين نهايات التكامل الجديدة (والتى يصحبها بعض الصعوبات) من منطقة التكامل الجديدة وهى صورة منطقة التكامل الأصلية بالتحويل الأحادى المعطى.

من خواص الجاكوبيان المشهورة والتى نعرضها لدالة المتغيرين (التعميم وارد) الخواص الآتية :

إذا كانت f,g دوال من u,v وكانت u,v دوال من x,y فإن

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(f,g)} = 1$$

مثال:

إثبت أن $\int_0^a\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^x f(a-y,\ a-x)\,dy\,dx$

الحل: بوضع $u = a-y,\ v = a-x$ نحصل على $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ وعليه

$$I = \int_0^a\int_0^x f(a-y,\ a-x)\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^u f(v,u)\,dv\,du$$

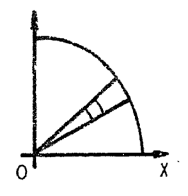
$$= \int_0^a\int_0^x f(y,x)\,dy\,dx$$

مثال ١٣:

لإيجاد $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy\, dx$

نتعرف أولا على حقل التكامل تمهيدا للتحويل إلى إحداثيات قطبية. حقل التكامل محصور بالمنحنيات

$$y=0,\ y=\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x^2+y^2=a^2,\ x=0,\ x=a$$



وهو ربع دائرة واقعة في الربع الأول. بالتحويل للإحداثيات القطبية $y = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta$ تتحول ربع الدائرة في المستوى xy إلى ربع دائرة أيضا $r = a$ في المستوى $r\theta$

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\; r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \left[\frac{-2}{3} (a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^a d\theta = \frac{1}{3} a^3 [\pi/2]$$

$$= \pi a^3/6$$

مثال ١٤:

لإيجاد الحجم المحصور بالسطح الناقصى

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

نرى أن هذا الحجم يساوى ثمانية أمثال الحجم الموجود في الثمن الموجب والمحصور بين مستويات الإحداثيات والسطح الناقصى، من ثم

$$V=8\int_D\int\int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz\,dy\,dx$$

حيث المنطقة D هى مسقط السطح الناقصى على الربع الأول (الموجب) من مستوى xy أى المنطقة المحصورة بين المنحنيات.

$$y=0=z\,;\ x=0=z\,;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0=z$$

$$V=8\int_R\int c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

بوضع $x=a\,r\cos\theta\ ,\ y=b\,r\sin\theta$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -ar\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=abr$$

بالتحويل المعطى يتحول القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

فى مستوى xy إلى دائرة $r=1$ فى مستوى التحويل $r\theta$

$$V=8\,abc\int_0^{\pi/2}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta=8\,abc\left[-\frac{1}{3}\,(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1[\theta]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{4\pi\,abc}{3}$$

مثال ١٥:

لإيجاد $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ نعتبر

$$I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

بالتحويل إلى الاحداثيات القطبية $x=r\cos\theta\,,\,y=r\sin\theta$ يتحول التكامل I^2 الواقع فى الربع الأول من مستوى xy إلى تكامل واقع فى الربع الأول من مستوى $r\theta$

$$I^2=\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta=[-{}^1/_2\,e^{-r^2}]_0^\infty\,[\theta]_0^{\pi/2}=\pi/4$$

$$i.e.\qquad I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}/2$$

مثال ١٦:

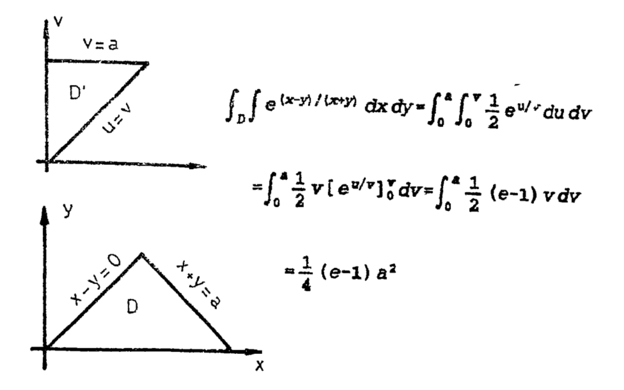
لإيجاد $J=\int_D\int e^{(x-y)/(x+y)}\,dx\,dy$ حيث D هى المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y=0\,,\,x-y=0\,,\,x+y=a$ نضع $x-y=u,\;x+y=v$ أى أن

$$x=\frac{1}{2}(u+v)\qquad\qquad y=\frac{1}{2}(v-u)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

بالتحويل المعطى تتحول المنطقة D فى مستوى xy إلى المنطقة D' فى مستوى uv محصورة بالمنحنيات $u=0,\,u=v,\,v=a,$

ويتحول التكامل إلى



$$\int\!\!\int_D e^{(x-y)/(x+y)}\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^v \frac{1}{2} e^{u/v}\,du\,dv$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2} v\,[e^{u/v}]_0^v\,dv = \int_0^a \frac{1}{2}(e-1)\,v\,dv$$

$$= \frac{1}{4}(e-1)\,a^2$$

مثال ١٧:

أوجد قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin\phi}{\sin\theta}}\,d\phi\,d\theta$$

الحل: بإستخدام التعويض $x = \sin\phi\cos\theta,\ y = \sin\phi\sin\theta$ نحصل على

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} d\phi\,d\theta = \sin\phi\cos\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$I = \int\!\!\int \frac{1}{\sin\phi\cos\phi}\sqrt{\frac{\sin\phi}{\sin\theta}}\,dy\,dx = \int\!\!\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

من العلاقات $x^2+y^2=\sin^2\phi,\ y/x=\tan\theta$ نرى أن منطقة التكامل هى جزء القرص الواقع فى الربع الأول ومركزه نقطة الأصل ونصف قطره الوحدة

$$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \quad [\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}]_0^{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{y}}\,dy=\pi$$

مثال ١٨:

إستخدم التحويل $x = u(1+v),\ y = v(1+u)$ لإيجاد قيمة التكامل

$$I=\int_0^2\int_0^x\{(x-y)^2+2(x+y)+1\}^{-1/2}\,dy\,dx$$

الحل: نتعرف أولا على منطقة التكامل فى مستوى xy وصورتها في مستوى uv. منطقة التكامل في مستوى xy محددة بالمنحنيات $y = x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$ وصورتها فى مستوى uv بالمنحنيات

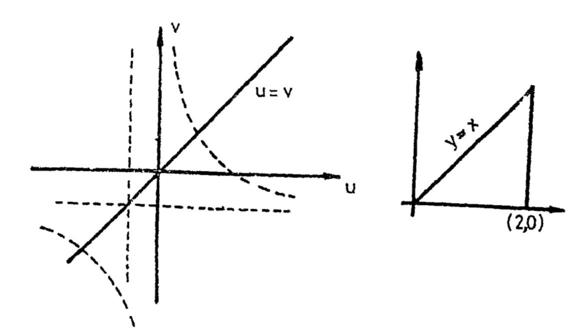
$$y=x\Rightarrow v(1+u)=u(1+v)\Rightarrow u=v$$

$$y=0\Rightarrow v(1+u)=0\Rightarrow v=0 \text{ or } u=-1$$

$$x=0\Rightarrow u(1+v)=0\Rightarrow u=0 \text{ or } v=-1$$

$$x=2\Rightarrow u(1+v)=2$$

النقطة $(x, y) = (0, 0)$ تتحول إلى إحدى النقطتين $(u, v) = (0, 0)$ أو $(-1, -1)$ والنقطة $(x, y) = (2, 0)$ تتحول إلى إحدى النقطتين $(u,v) = (2, 0)$ or $(-1, -3)$



دوال التحويل ليست دوال أحادية. لجعلها أحادية يجب الإكتفاء بإجراء التكامل على واحدة فقط من مناطق التحويل. جاكوبيان التحويل J

$$J=\begin{vmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{vmatrix}=1+u+v$$

$$I=\int_R\int \{(u+v+1)^2\}^{-1/2}(u+v+1)\;du\,dv$$

$$=\int_0^1\int_0^{2/1+v} du\,dv=\int_0^1 [\frac{2}{1+v}-v]\;dv$$

$$=[2\ln(1+v)-\frac{1}{2}v^2]_0^1=2\ln 2-\frac{1}{2}$$

مثال ١٩:

أوجد بإستخدام التحويل $x+y=u, y=uv$ قيمة التكامل

$$I=\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{\sec(x+y)}{(x+y)}\,dy\,dx$$

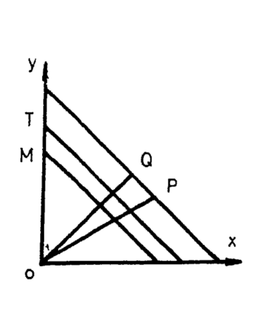
الحل: سوف نلجأ لتقسيم منطقة التكامل بمنحنيات u = constant

ومنحنيات أخرى v = constant، بحذف v من علاقتى التحــويل نحصل على

$x + y = u$ وبحذف u نحصل على $y = \frac{v}{1-v}x$

المستقيمات $x+y=u=c$

والمستقيمات $y/x = \frac{v}{1-v}$



تقسم منطقة التكامل إلى شرائح مســـاحات J du dv حـــيث J هو جاكوبيان التحويل. فى هذا التحويل تتغير u (مع ثبات v) من u = 0 إلى u = a والتكامل يجرى فى هــــذه الحـــالة وتريا فى إتجاه OP وتتغير v / 1 - v من tan 0 إلى tan 90° أى أن v تتغير من 0 إلى 1 من ثم

$$I=\int_0^1\int_0^a \frac{\sec u}{u}\, J\, du\, dv$$

$$J = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

$$I=\int_0^1\int_0^a \sec u\, du\, dv = \ln[\sec a + \tan a]\ .$$

يمكـن الحصـول علـى نتـائج مماثلـة للمعادلـة (15) عنـد إسـتبدال المتغيرات فى التكاملات الثلاثية أو الأعلى. نفرض أن دوال التحويل فـى حالة التكامل الثلاثى هى:

$$x=x(u,v,\omega)\ ,\ y=y(u,v,\omega)\ ,\ z=z(u,v,\omega) \qquad (16)$$

عذه الدوال يجب أن تكون وحيدة القيم وبحيث [illegible]
التحول $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,\omega)$ ولايزيد بدون حد فى حقل [illegible]
هنا أيضاً نستعمل تمثيل المقادير u, v, ω فى نظام إحداثيات [illegible]
نفرض أن R' هى المنطقة فى الفراغ $uv\omega$ المناظرة للمنطقة R فى
الفراغ xyz. نقط المنطقة R' فى تناظر أحادى مع نقط R. [illegible]
الثلاثى $\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ إلى

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} g(u,v,\omega)$$

$$\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}\right] du\,dv\,d\omega \qquad (1)$$

حيث $g(u,v,\omega) = f\{x(u,v,\omega)\ ,\ y(u,v,\omega)\ ,\ z(u,v,\omega)\}$

مثال ٢٠: إستخدم التحويلات

$$u = x+y+z\ ,\ uv = y+z\ ,\ uv\omega = z$$

لحساب $I = \iiint_R e^{-(x+y+z)^3}\,dx\,dy\,dz$ حيث R هى
المنطقة المحاطة بالمستويات

$$x+y+z=1\ ,\ x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$$

بحل معادلات التحويل المعطاه فى x, y, z نحصل على

$$x = u(1-v)\ ,\ y = uv(1-\omega)\ ,\ z = uv\omega$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)} = \begin{vmatrix} 1-v & v(1-\omega) & v\omega \\ -v & u(1-\omega) & u\omega \\ 0 & -uv & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

تتحول منطقة التكامل فى مستوى xyz إلى المنطقة المحصورة بالأسطح

$$u=1 \quad , \quad v=1 \quad , \quad \omega=1 \quad , \quad \omega=0$$

$$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 u^2 ve^{-u^3}\,d\omega\,dv\,du=\int_0^1 u^2 e^{-u^3}\,du\int_0^1 v\,dv\int_0^1 d\omega$$

$$=[-1/3\, e^{-u^3}]_0^1\,[v^2/2]_0^1 \,.\, 1=(1-e^{-1})/6$$

مثال ٢١:

لإيجاد الحجم المحصور بالإسطوانات الزائدية

$$xy=a^2\,,\, xy=b^2,\, yz=a^2 \;,\; yz=b^2 \;,\; zx=a^2 \;,\; zx=b^2$$

فإن تعويضا مناسبا يعطي حدودا سهلة في مستوى $uv\omega$

هو

$$xy=u \;,\; yz=v \;,\; zx=\omega$$

$$\frac{\partial(u,v,\omega)}{\partial(x,y,z)}=1/\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}=\begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{vmatrix}=2xyz$$

$$=2\sqrt{x^2y^2z^2}=2\sqrt{uv\omega}$$

ومن ثم فإن الحجم المطلوب

$$V=\int\int_R\int dx\,dy\,dz=\int\int_R\int \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}\right| du\,dv\,d\omega$$

$$=\int_{a^2}^{b^2}\int_{a^2}^{b^2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{1}{2\sqrt{uv\omega}}\,du\,dv\,d\omega=\frac{1}{2}\,(\int_{a^2}^{b^2}u^{-1/2}\,du)^3$$

$$\frac{1}{2}\{[2\sqrt{u}]_{a^2}^{b^2}\}^3=4\,[b-a]^3$$

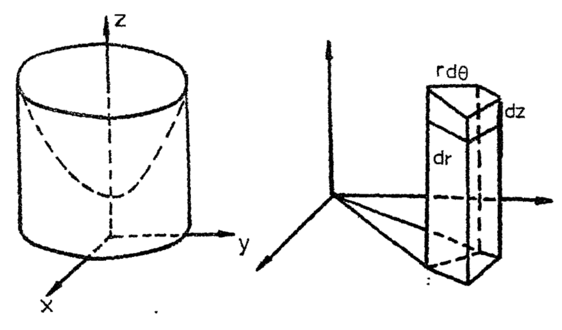
مثال ٢٣:

أوجد $\iiint_R (x-y+z^2)\,dx\,dy\,dz$ حيث R هي

المنطقة المحصورة بين الأسطح $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=1+x^2+y^2$

لإجراء هذا التكامل سوف نلجأ لتحويل الإحداثيات الكارتيزية إلى

إحداثيات إسطوانية.



نفرض

$$x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta\ ,\ z=z$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_R (x-y+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_0^{1+r^2} [(\cos\theta-\sin\theta)\,r^2+z^2 r]\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 [(\cos\theta-\sin\theta)\,r^2 z+r z^3/3]_0^{1+r^2}\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} [(\cos\theta-\sin\theta)\, r^2 (1+r^2) + (1/3) r (1+r^2)^3]\, dr$$

$$=\int_0^{2\pi} \{(\cos\theta-\sin\theta)\, [\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{5}]_0^2 + \frac{1}{6}\, [\frac{(1+r^2)^4}{4}]_0^2\}\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} [(\cos\theta-\sin\theta)\, (\frac{8}{3}+\frac{32}{5}+\frac{1}{24}(624)]\, d\theta$$

$$=\frac{624}{24}(2\pi)=52\pi$$

التكامل السطحى

(Surface Integral)

يسمى سطح $S:f(x,y,z)$ سطحا ناعما (Smooth) أذا كانت المشتقات الأولى f_x, f_y, f_z دوال متصلة عند كل نقطة من نقط السطح تؤدى نعومة السطح. ليس فقط إلى تواجد المستويات المماسة والمستقيمات العمودية عند كل نقطة بل وإستمرار غيرها.

لإيجاد مساحة جزء من السطح محدد بمنحى مغلق C (أو لإيجاد مساحة السطح) سوف نفترض أن أى مستقيم يوازى محور من محاور الإحداثيات وليكن محور z لايقطع S فى أكثر من نقطة. المسقط C` للمنحنى المغلق C على مستوى xy يغلف منطقة R . قسم النطقة R بشبكة من المستقيمات توازى محور الإحداثيات x,y إلى n من الأقسام $\{\Delta R_i\}$ المستويات العمودية على مستوى xy والمارة بخطوط شبكة التقسيم تقسم السطح S` إلى مناطق صغيرة $\{\Delta\sigma`_i\}$ مساحاتها $\{\Delta\sigma_i\}$ نفرض أن ΔA_i هى مساحة ΔR_i ترتبط مساقط $\{\Delta\sigma_i\}$ على مستوى xy تقريبا بالعلاقة

$$\Delta A_i = \cos\gamma_i \, \Delta\sigma_i$$

حيث $\cos\alpha i, \cos\beta i, \cos\gamma i$ هى جيوب تمام إتجاه العمودى على السطح S عند النقطة (x_i, y_i, z_i) على S_i (يأتى التقريب من إعتبار أن $\Delta\sigma_i$ سطحا مستويا)

ولكن

$$\cos\alpha_i : \cos\beta_i : \cos\gamma_i = (f_x)_i : (f_y)_i : (f_z)_i$$

بالتالى

$$\cos\gamma_i = \frac{(f_z)_i}{\pm\sqrt{(f_x)_i^2 + (f_y)_i^2 + (f_z)_i^2}}$$

(تختار الإشارة المناسبة كى يشير العمودى على السطح إلى الخارج)

يمكن تقريب مساحة السطح `S بالعلاقة

$$\sigma = \iint_R \left(\sqrt{f_x^{\ 2} + f_y^{\ 2} + f_z^{\ 2}} \,/\, f_z\right) dA = \iint_R \sec\gamma \, dA$$

بإعتبار المساقط ``R`,R للقطعة `S على مستويات الإحداثيات الأخرى نحصل على

$$\sigma = \iint_{R'} \sec\alpha \, dA , \qquad \sigma = \iint_{R''} \sec\beta \, dA$$

يعرف التكامل السطحى للدالة المتصلة g(x,y,z) والمعرفة على السطح `S كالآتى:

نقسم السطح `S إلى n من المناطق $\{\Delta S_i\}$ مساحاتها $\{\Delta\sigma_i\}$ نكون الجمع

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i , y_i , z_i)\Delta\sigma_i$$

حيث (x_i, y_i, z_i) نقطة من السطح $\Delta S`_i$ نهاية المجموع عند ما تؤول n إلى مالا نهاية وبحيث تؤول أبعاد أكبر المناطق $\{\Delta S_i\}$ إلى الصفر يعرف التكامل السطحى للدالة g والذى يرمز له بالرمز

$$\iint_{S`} g(x, y, z) d\sigma$$

يجرى عادة التكامل السابق بهيئة تكامل متتابع كالآتى:

إذا أمكن كتابة معادلة السطح بالهيئة z=h(x,y) فإن

$$d\sigma = \sec\gamma \, dA = \sqrt{h_x^{\ 2} + h_y^{\ 2} + 1} \; dx \, dy$$

وبالتالى فإن التكامل السطحى يمكن كتابته بالهيئة

$$\iint_S g(x,y,z)d\sigma = \iint_R g(x,y,h(x,y))\ \sqrt{h_x^{2} + h_y^{2} + 1}\ dxdy$$

حيثR هو المسقط -- على مستوى xy

مثال: إوجد $I = \iint_s xyz\ ds$

حيث S هو جزء كرة الوحدة الواقع فى الثمن الأول

الحل:

كرة الوحدة هى $x^2+y^2+z^2 = 1$ من ثم

$$h_x^2+h_y^2+h_z^2 = (2x)^2 +(2y)^2+(2z)^2 =4$$

$$I = \iint_R xyz \frac{\sqrt{h_x^{2} + h_y^{2} + h_z^{2}}}{h_z}\ dxdy = \iint_R xyz \frac{1}{z}\ dxdy$$

حيث R هى جزء دائرة الوحدة الواقع فى الربع الأول (أىمسقط S)

$$\text{i.e.}\quad I = \iint_R xy\ dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\ dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2} y(1-y^2)\ dy = \frac{1}{8}$$

مثال: إوجد مساحة سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$ فوق مستوىxy المحصور داخل الإسطوانة

$$x^2+y^2=ax$$

الحل: نسقط شريحة مساحة من السطح على مستوىxy

$$\bar{n}.\bar{r}\ ds = dxdy$$

حيث **n** وحدة متجه عمودى على سطح الكرة عند نقطة على الشريحة ds

$$\frac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2=a^2}}.\bar{k}\,ds = dxdy \Rightarrow dS=\frac{a}{z}\,dxdy$$

المساحة المطلوبة

$$S=\iint_S dS=\iint_R \frac{a}{z}\,dxdy$$

حيث R هو مسقط S على مستوى xy .بالتحويل إلى إحداثيات قطبية

$x= r\cos\theta,\quad y= r\sin\theta$

معادلة غلاف المسقط القطبية هى

$$r= a\cos\theta$$

$$S=\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{2}{2}a\int_0^{\pi/2}2\left[\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\theta}d\theta = -2a\int_0^{\pi/2}\left[\sqrt{a^2-a^2\cos\theta}-a\right]d\theta$$

$$=-2a^2\left[-\cos\theta-\theta\right]_0^{\pi/2}=a^2(\pi-2)$$

سوف نرضح كيفية إيجاد التكامل السطحى

$$\iint_s f(\bar{r}).\ \bar{n}\ ds$$

حيث الدالة f دالة موضع من نقط السطح s والمعروف بارامتريا بالهيئة

$$S = \bar{r}(u_1 v) = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}$$

بينما n وحدة متجه عمودى على السطح

المتجهان $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \overline{r_u}, \qquad \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \bar{r}_v$

يمسا السطح (يوازيان مستقيمين يمسا السطح) وعليه فأن وحدة متجه عمودى على السطح تحسب بالهيئة

$$\bar{n} = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v) \ / \ |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|$$

أيضاً، يمثل التعبير

$$\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} dv\right|$$

شريحة مساحة ds على السطح عبارة عن مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $r_u\ du$ ، $r_v\ dv$ ضلعين متجاورين ومن ثم

$$\int_s f(\bar{r}).\bar{n}ds = \iint_s f(\bar{r}).(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)\ du\ dv$$

بينما تحسب مساحة السطح من

$$\iint_s ds = \iint_s |\bar{r}_u x \bar{r}_v| du\ dv$$

مثال:

عين مساحة جزء السطح المكافئ $x = y^2 + z^2$

والذى يمكن أن يعطى بارامتريا بالهيئة

$$x = t^2, \ y = t\cos\theta, \ z = t\sin\theta$$

من $x = 0$ الى $x = 12$

الحل: متجه موضع أى نقطة على السطح

$$\bar{r} = t^2\,\bar{i} + t\cos\theta\,\bar{j} + t\sin\theta\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = 2t\bar{i} + \bar{j}\cos\theta + \bar{k}\sin\theta$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -\mathrm{j}t\sin\theta + \bar{k}\,t\cos\theta$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2t & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -t\sin\theta & t\cos\theta \end{vmatrix} = t\bar{i} - 2\,\bar{j}t^2\cos\theta - 2\mathrm{k}t^2\sin\theta$$

$$ds = |\,\bar{r}_t x \bar{r}_\theta\,|\,dt\,d\theta = \sqrt{t^2 + 4t^4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\,dt\,d\theta$$

$$= t\sqrt{1+4t^2}\,dt\,d\theta$$

$$S = \iint_s t\sqrt{1+4t^2}\,dt\,d\theta = \int t\sqrt{1+4t^2}\,dt\,[\theta]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi\int_0^{12} \tfrac{1}{2}\sqrt{1+4x}\,dx = \pi\left[(1+4x)^{3/2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\right]_0^{12}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[49^{3/2} - 1\right] = \frac{\pi}{6}(342) = 57\,\pi$$

تمارين ٣

١- بإجـراء التكاملات الآتية حول المنطقة R المحاطة بالدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ إثبت أن

$$(i) \quad \int_R\int x^2\, dx\, dy = \pi a^4/4$$

$$(ii) \quad \int_R\int x^2 y^2\, dx\, dy = \pi a^6/24$$

$$(iii) \quad \int_R\int e^{b(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \pi\,(e^{ba^2}-1)/b$$

$$(iv) \quad \int_R\int \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy = \pi\,(1-\cos a^2)$$

$$(v) \quad \int_R\int \frac{dx\, dy}{1+(x^2+y^2)^2} = \pi \tan^{-1} a^2$$

٢ – إستخدم تعويضا مناسبا لإثبات أن

$$(i) \quad \int_{-1}^{0}\int_{y}^{-y} (x-y)\,(x+y)^4\, dx\, dy = 32/105$$

$$(ii) \quad \int_D\int (x-y+1)^2\,(2x+3y-1)^3\, dx\, dy = 1190/3$$

$$(iii) \quad \int_0^1\int_0^{1-x} e^{y/(x+y)}\, dy\, dx = \frac{1}{2}\,(e-1)$$

$$(iv) \quad \int_D\int dx\, dy = 50\,,$$

حيث D هى المنطقة المحصورة بالمستقيمات

$$x-y=1,\ x-y=3,\ 2x+3y=0,\ 2x+3y=5$$

٣ – أوجد قيمة التكامل

$$\int_D\int (x+y)\cos^2(x-y)\,dx\,dy$$

حيث D هى المنطقة المحصورة بمتوازى الأضلاع الذى رؤوسه

$$(0,-\pi)\ ,\ (\pi,0)\ ,\ (2\pi,-\pi)\ ,\ (\pi,-2\pi)$$

٤ – إثبت أن

$$\int\int f_{xy}\,dx\,dy \qquad 0\le \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\le 1$$

$$=\int_0^1 a\,f_x(at,b-bt)\,dt-f(a,0)+f(0,0)$$

٥ – أوجد المساحة فى الربع الأول المحصورة بالمنحنيات

$$xy^2=n,\ xy^2=m\ ,\ y^2=ax\ ,\ y^2=bx$$

٦ – أوجد $\int_D\int (x^3+y^2)\,dx\,dy$ حيث D هى المنطقة المحصورة بالمنحنى $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

٧ – أوجد $\int\int_D (x-2y+3)\,e^{2x+y+1}\,dx\,dy$ حيث D هى المنطقة المحصورة بمتوازى الأضلاع

$$x-2y=0,\ x-2y=3,\ 2x+y=-1,\ 2x+y=3$$

٨ – بالتحويل إلى إحداثيات قطبية إثبت أن

$$\int_0^{a/\sqrt{2}} dy\ \int_y^{\sqrt{a^2-y^2}} \ln(x^2+y^2)\,dx=\pi/4\ a^2\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)$$

مع العلم بأن $\lim_{r\to 0} r^2\ln r=0$

٩ – أ) إستخدم التعويض $x+y=u,\ x-y=v$ لإثبات أن

$$\int_0^a\int_0^a \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2+(x-y)^2}}=2a\{\ln(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2}\}$$

ب) اثبت أن

$$\int_{-1}^{1}\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2+4y^2)^{3/2}\,dxdy = 32\,\pi/5$$

١٠ – إذا كانت D هي المنطقة المحصورة بالقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

فإثبت

$$(i) \quad \iint_D x\,dx\,dy=(1/3)\ a^2 b$$

$$(ii) \quad \iint_D x^2\,dx\,dy=\pi\ a^3 b/16$$

$$(iii) \quad \iint_D (x^2+y^2)\ dx\,dy=\pi\ ab\,(a^2+b^2)/16$$

١١ – أوجد قيمة $\iint (x^2-y^2)/(x^2+y^2)\ dx\,dy$ على المنطقة D في الربع الأول المحصورة بمحاور الإحداثيات والقطع المكافئ $y^2=4\,(1-x)$ بالتحويل إلى الإحداثيات القطبية.

١٢ – أوجد المساحة المحددة بالقطع الناقص $(2x+y+1)^2+(x-y+2)^2=9$

١٣ – إثبت أن الحجم المحصور بالسطح $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=1$ يساوي $\frac{4n}{2n+1}\pi\,abc$

١٤ – بالتحويل إلى إحداثيات قطبية إثبت أن

$$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sin\{(\pi/a^2)\ (a^2-x^2-y^2)\}dy=a^2/2$$

١٥ – بإستخدام التحويل $u=y/x^3,\ v=x^2+y^2$ إحسب التكامل

$$\iint (x^4+4x^2y^2+3y^4)\ x^{-4}\,dx\,dy$$

مأخوذا على المنطقة في الربع الأول من مستوى xy والمحصورة

بالمنحنيات

$$y=x^3 \ , \ y=2x^3 \ , \ x^2+y^2=1$$

١٦ – أوجد قيم التكاملات

$$(i) \quad \int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$(ii) \quad \int_0^a dy \int_y^a \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}}$$

$$(iii) \quad \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy$$

١٧ – أوجد

$$\iint_R\int (x-y-z)^3 (x+z)^2 (2x-3y+2z)^2\, dx\, dy\, dz$$

حيث R هى المنطقة فى R^3 المحصورة بين المستويات

$$x-y=1 \, , x-y=2 \, , x+z=-1 \, , x+z=1$$

$$2x-3y+2z=0 \, , 2x-3y+2z=1$$

١٨ – بالتحويل إلى إحداثيات قطبية إثبت أن

$$\int_0^a xe^{-x^2}\, dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2} \quad e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{4a^2}\{1-(1+a^2)\, e^{-a^2}\}$$

١٩ – بإستخدام التحويل $u=x+y, v=x-y$ إثبت أن

$$\int_R\int \sin(x+y)\tan(x-y)\; dx\, dy$$

يساوى $1/4 \ln 2$ حيث R هى المنطقة المحصورة بين

$$x+y=0 \, , x+y=\pi/_2 \, , x-y=9 \, , x-y=\pi/_4$$

٢٠ – إستخدم التعويض $v=xy^2$, $u=\frac{y^2}{x}$. لإثبات أن المساحة فى الربع الأول المحصورة بين المنحنيات

$xy^2=4C^3$ $\quad y^2=4ax \, , y^2=9ax \, , xy^2=C^3$ حيث $a>0 \, , c>0$

تساوى $(24+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-8\sqrt{5})\,c^{9/4}/9a^{1/4}$

٢١ – إثبت أن الحجم من السطح $x^2+y^2=4az$ المقطوع بالمستوى $x+y+2z=4a$ يساوى $25\pi a^3/2$

٢٢ – إثبت أن الحجم المحصور بالست إسطوانات مكافئية

$$x^2=ay\,,\ x^2=2ay\,,\ y^2=az\,,\ y^2=2az\,,\ z^2=ax\,,\ z^2=2ax$$

يساوى $a^3/7$

٢٣ – إوجد $\int_R\int (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,dx\,dy\,dz$

حيث R هى المنطقة فى الثمن الأول المحصورة بالكرة

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

٢٤ – بإستخدام التعويض $x=u^2\,,\ y=v^2\,,\ z=\omega^2$ إثبت أن

حجم الجسم المعين من $0\le\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{a}$ حيث $a>0$

يساوى

$$V=8\int_0^b du\int_0^{b-u} dv\int_0^{b-u-v} u\,v\,\omega\, d\omega=a^3/90 \qquad b^2=a$$

٢٥ – إرسم المنطقة التى يجرى عليها التكامل

$$I=\int_0^{a/\sqrt{2}} dx\int_0^{x}\cos k\,(x^2+y^2)\,dy+\int_{a/\sqrt{2}}^{a} dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\cos k\,(x^2+y^2)\,dy$$

بعكس ترتيب التكامل عبر عن المجموع السابق على هيئة تكامل واحد. بالتحول إلى إحداثيات قطبية إثبت أن

$$I=(\pi\sin ka^2)/8k$$

٢٦ – إرسم المنطقة المأخوذ عليها التكامل

$$\int_0^{a} x\,e^{-x^2}\,dx\int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{y}{x^2+y^2}\,e^{-y^2}\,dy$$

بالتحويل إلى إحداثيات قطبية إثبت أن التكامل يساوى

$$[1-(1+a)^2 e^{-a^2}]/4a^2$$

٢٧ - بإستخدام التحويل $x=u^2-v^2, y=2uv$ إثبت أن

$$\int_R\int \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{(1+x)^3(x^2+y^2)}} = 8+4\sqrt{7}-4\sqrt{19}$$

حيث يجرى التكامل على المنطقة فى الربع الأول المحصورة بين

القطاعات المكافئية المتحدة البؤرة

$$y^2=4x+4\,,\; y^2=x+1/4 \quad y^2=64-16x\,,\; y^2=4-4x$$

٢٨ - إذا كانت R هى المنطقة التى فيها x, y, z جميعها موجب بحيث

$0 \le x+y+z \le 1$ فإثبت أن

$$I=\int\int_R\int (x+y+z)^n xyz\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{5!\,(n+6)}$$

وذلك بإستخدام التحويل

$$x+y+z=u\,,\; y+z=uv,\; z=uv\omega$$

٢٩ - أوجد الحجم المحصور بين الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$ والإسطوانة

$x^2+y^2=ax$

٣٠ - إثبت أن الحجم المحصور بين السطح الناقصى

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

والإسطوانة

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4\sin^2\alpha$$

يساوى

$$.4/_3\,\pi\,abc\,(1-\cos^3\alpha)$$

٣١ – إستخدم التعويض $u = x + y, v = y$ لإثبات أن

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} \sin\left(\frac{\pi y}{x+y}\right) dx\, dy = \frac{2}{\pi}$$

٣٢ – أوجد

$$\int_R \int \frac{dx\, dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

حيث R هى المنطقة المحصورة بلية واحدة من منحنى اللمنسكيت

$$r^2 = \cos 2\theta$$

٣٣ – إثبت أن

$$\iiint \left(\frac{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right)^{1/2} dx\, dy\, dz = \frac{\pi\, abc}{3}(3\pi - 8)$$

٣٤ – إثبت أن حجم الجسم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمنحنيات

$$y^2 = a^3 x\,,\ y^2 = b^3 x\,,\ x^2 = c^3 y\,,\ x^2 = d^3 y$$

حول محور y يساوى $\frac{3\pi}{10}(a^4 - b^4)(c^5 - d^5)$

٣٥ – إعكس ترتيب التكامل $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dy\, dx$

٣٦ – إستخدم التعويض

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}{a}$$

لإثبات أن

$$\int_0^\infty \int_0^{\sqrt{2ax}} \frac{a^2\, dy\, dx}{(x^2+y^2+a^2)^2} = \pi/4\sqrt{2}$$

٣٧ – أعكس ترتيب التكامل

$$\int_0^{a/2} \int_{x^2/a}^{x-x^2/a} f(x,y)\, dy\, dx$$

٣٨ – بالتحويل إلى إحداثيات قطبية أوجد قيمة التكامل

$$\int_0^{a\tan\alpha}\int_0^{x}\frac{dy\,dx}{(x^2+y^2+a^2)^2}$$

٣٩ – إثبت أن

$$(i)\ \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(x^2+y^2+z^2)^{m/2}}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^{(m+5)/2}}\ dx\,dy\,dz=\frac{\pi}{2a^2(m+3)}$$

$$(ii)\int_D\int f(x\ y)\ dx\,dy=\ln 2\int_1^2 f(u)\ du$$

حـيث D هى المنطقة فى الربع الأول التى يحدها المنحنيات

$xy=1\ ,\ xy=2\ ,\ y=x\ ,\ y=4x$

٤٠ – أوجد مساحة السطح الناتج من دوران $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad a>b$
حول محورة الأصغر أوجد أيضا أيضا مساحة السطح إذا كان
الدوران حول المحور الأكبر.

٤١ – إوجد $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)^2}dx\,dy$ ، $\int_0^\infty\int_0^\infty xye^{-x^2-y^2}dx\,dy,$

٤٢- إثبت أن مساحة سطح معادلته الضمنية f(x,y,z,)=0 تعطى من ..

$$\iint_{R_{xy}}\frac{\sqrt{f_x^{\ 2}+f_y^{\ 2}+f_z^{\ 2}}}{|f_z|}\ dx\,dy$$

حيث R_{xy} هى مسقط السطح على مستوى xy

٤-٧ تطبيقات التكامل الثلاثى

للتكاملات المتعددة تطبيقات كثيرة كما أنها أداة جيدة فى صياغة بعض المفاهيم الطبيعية. وحسابها كالمساحات والحجوم والكتل .

٤-٧-١ الكتلة:

نفرض أن جسما ما يشغل منطقة G من R^3. نفرض أيضا أن الجســم غير متجانس وأن كثافته عند أى نقطة (x, y, z) هو دالة متصلة $p(x, y, z)$. على هذا فإن الوزن التقريبى لصندوق صغير أبعاده $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ يساوى $P(x, y, z)\Delta x \Delta y \Delta z$ حيث (x, y, z) نقطة من نقط الصندوق. عند جمع أمثال هذه الأوزان وأخذ النهاية عندما تقترب كل من $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ من الصفر نحصل على وزن الجسم

$$m=\iiint_G P(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

يكون عنصر الحجم فى الإحداثيات الإسطوانية مساويا $r\,dr\,d\theta\,dz$ وفى الإحداثيات الكرية مساويا $r^2 \sin\theta\, d\phi\, dr\, d\theta$

مثال ٢٢:

الكثافة عند أى نقطة من نقط كرة مصمتة نصف قطرها a تساوى kr حيث r هو بعد النقطة عن مركز الكرة. لإيجاد كتلة الكرة نعتبر أن مركز الكرة هو قطب إحداثيات كرية. من ثم فإن كتلة شريحة حجم تساوى

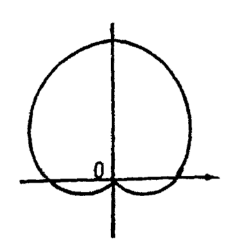
$$dm=kr\,(r^2 \sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$m=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} kr^3 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$=[2\pi]\,[-\cos\theta]_0^{\pi}\,[\frac{kr^4}{4}]_0^{a}=k\pi a^4$$

مثال ٢٤:

صـــــــــفيحة رقيقة منبسطة تشغل حيزا محصورا بالكاردويد $r = a(1+\sin\theta)$ كثافتها السطحية $p(x, y)$ عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن محور y، أى أن



$$P(x,y) = k|x| = k|r\cos\theta|$$

حيث k هو ثابت التناسب. من ثم فإن عنصر كتلة يساوى

$$dm = k|r\cos\theta|\, r\, d\theta\, dr$$

من تماثل منحنى الكاردويد حول محور y يمكن أن نكتب

$$m = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a(1+\sin\theta)} k(r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{2k}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 (1+\sin\theta)^3 \cos\theta\, d\theta = \frac{8}{3} k a^3$$

مثال ٢٥:

أوجد الحجم المحصور بالإسطوانات الزائدية

$xy = 1, xy = 2, yz = 1, yz = 2, zx = 1, zx = 2$

الحل: التحويل الواضح الذى يؤدى إلى صيغ بسيطة للحدود فى مستوى $uv\omega$

يعطى من $xy = u,\ yz = v,\ zx = \omega$

$$\frac{\partial(u,v,\omega)}{\partial(x,y,z)} = 2xy \rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)} = \frac{1}{2}(uv\omega)^{-1/2}$$

الحجم المطلوب

$$V = \iiint dx\, dy\, dz = \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2}(uv\omega)^{-1/2}\, du\, dv\, d\omega = 4(\sqrt{2}-1)^3$$

٢-٧-٤ العزم الأول (First moment)

العـــزم الأول (أو ببساطة العزم) لنقطة مادية حول محور هو حاصل ضرب الكتلة فى المسـافة مصحوبة بإشارة (signed distance) بين النقطة و المحور. (أى مستقيم فى مستوى إحداثيات يقسم المستوى جهتين تكون إشارة النقط فى جهة منها عند التعويض بها فى معادلة المستقيم مخالفة لإشارة النقط فى الجهة الإخرى).إذا كانت النقطة المادية فى الفراغ فإننا نعتبر العزم الأول حول مسـتوى وهو حاصل ضرب الكتلة فى بعد النقطة (مصحوبا بإشارة) عن المستوى. إذا إعتبرنا جسما غير مركز عند نقطة فإننا نحسب العزم الأول بجمع حواصل ضرب كتل قطع صغيرة فى أبعاد النقط (مصحوبا بإشارة) عن المحور (المستوى) واخذ النهاية عندما تصغر القطع الصغيرة بدون حد. يقود هذا التعريف بالطبع إلى تكامل.
سنرمز للعزم حول محورى x, y بالرموز M_x, M_y على الترتيب بينما سنرمز للعزوم حول المستويات xy, xz, yz بالرموز M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} على الترتيب.

مثال ٢٦:

ســـــوف نوجـــــد عزم صفيحة رقيقة يحدها منحنى الكاردويد $r=a(1+\sin\theta)$ حول محور x مع العمل بأن كثـافة الصفيحة عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطـــة عن محـــور y

كما فى المثال السابق سوف نستغل التماثل حول محور y

$$dm=k|x|\,dA=k|r\cos\theta|\,r\,d\theta\,dr$$

$$=kr^2\cos\theta\,d\theta\,dr$$

$$M_x=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{a(1+\sin\theta)} r\sin\theta\,(kr^2\cos\theta)\,dr\,d\theta$$

$$=2k\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{a(1+\sin\theta)}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\frac{ka^4}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\sin\theta)^4\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{ka^4}{10}\quad\left[\sin\theta\,(1+\sin\theta)^5-\frac{(1+\sin\theta)^6}{6}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

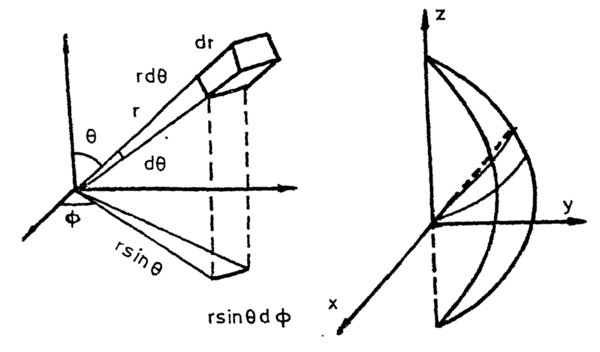
$$=\frac{ka^4}{10}\;2^5\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{15}ka^4$$

٣-٧-٤ العزم الثانى (Second moment)

العزم الثانى (أو عزم القصور الذاتى moment of inertia) لنقطة مادية حول محور ll (حول نقطة 0) هو حاصل ضرب الكتلة فى مربع بعدها عن المحور (النقطة)، ويرمز له بالرمز $I_{ll}(I_0)$. عزم القصور الذاتى لعدد منتهى $\{m_i\}_1^n$ من النقط المادية يحسب عن طريق الجمع $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$. يستخدم التكامل الثنائى لحساب عزم القصور الذاتى لأجسام متصلة التوزيع المادى.

مثال ٢٧:

لحساب عزم القصور الذاتى I لكرة متجانسة كثافتها k ومركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a حول أحد أقطارها



سوف نعتبر محور z هو قطر الكرة الذى سيحسب حوله عزم القصور الذاتى. بعد نقطة (r, θ, ϕ) فى الإحداثيات الكرية عن محور z تساوى $r\sin\theta$ بالتالى

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(r\sin\theta)^2\,k\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$=k\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a\left[2\left(\frac{2}{3}\right)\right]\left[\phi\right]_0^{2\pi}=\frac{8\,k\pi}{15}\,a^5$$

يعرف نصف قطر الدوران اللولبى (radius of gyration)R لجسم حول محور بأنه $R=\sqrt{I/m}$ حيث I هو عزم القصور الذاتى للجسم الذى كتلته m حول المحور.

مثال ٢٨:

إيجاد نصف قطر الدوران اللولبى R_{oz} حول محور z لجسم كثافته منتظمة k يشغل داخل السطح الناقصى

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

نوجد أولا عزم قصوره الذاتى حول محور z

$$I_{oz}=\iint_D\int (x^2+y^2)\,k\,dx\,dy\,dz$$

حيث منطقة التكامل D هى الحيز داخل السطح الناقصى. بأخذ التماثل بعين الإعتبار يمكن كتابة I_{oz} كالآتى:

$$I_{oz}=8\iint_G\int (x^2+y^2)\,k\,dx\,dy\,dz$$

حيث يجرى التكامل على الثمن الموجب.

بوضع

$$x=ar\sin\theta\cos\phi\ ,\ y=br\sin\theta\sin\phi\ ,\ z=cr\cos\theta$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\phi & ar\cos\theta\cos\phi & -ar\sin\theta\sin\phi \\ b\sin\theta\sin\phi & br\cos\theta\sin\phi & br\sin\theta\cos\phi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=abc\,r^2\sin\theta$$

$$I_{oz}=8\,abc\,k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^4\sin^3\theta\,(a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$=\frac{8\,abc\,k}{5}\,[\frac{2}{3}]\,\,[a^2\frac{\pi}{4}+b^2\frac{\pi}{4}]=\frac{4\pi\,abc\,k}{15}\,(a^2+b^2)$$

لإيجاد كتلة الجسم نأخذ بعين الإعتبار تماثل الجسم (أى نجرى التكامل على المنطقة G من السطح الناقصى الواقعة فى الثمن الأول

$$m=8\iint_G\int k\,dx\,dy\,dz=8k\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 abc\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$=8\,abc\,k\,[\frac{r^3}{3}]_0^1\,[-\cos\theta]_0^{\pi/2}\,[\phi]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4\pi abck}{3}$$

$$R_{oz} = \sqrt{I_{oz}/m} = \sqrt{(a^2+b^2)/5}$$

٤-٢-٤ مراكز الكتل (Centers of mass)

مركز كتلة جسم كتلته m هى النقطة التى يمكن إعتبار كتلة الجسم مركزة عندها فيما يخص حساب العزوم الأولى للجسم حول محاور الإحداثيات. إذا كان الجسم مستويا ومركز كتلته $(\overline{x},\overline{y})$ فإن

$$\overline{x}=M_y/m \quad , \quad \overline{y}=M_x/m$$

حيث M_x (M_y) هو العـزم الأول للجسم حول محور x (حول محور Y).

من المهم أن نلاحظ أن موقع مركز كتلة جسـم لا يعتمـد على موضع الجسم فى الفراغ كما أنه يجب أن نحذر من أنه لا توجـد نقطـة واحدة على جسم يمكن إعتبار كتلة الجسم مركزه عندها فيما يخص حساب عزم القصور الذاتى حول أى محور.

مركز كتلة جسم فى الفراغ يعطى من $\overline{X}=M_{yz}/m,\ \overline{y}=M_{xz}/m,\ \overline{Z}=M_{xy}/m$

حيث M_{pq} هو العزم الأول للجسم حول مستوى الإحداثيات pq. إذا كان الجسـم متجانسـا ذو كثـافة ثـابتة سـمى مركز كتلته تمركز الجسم (Centroid of the body)

مثال ٢٩:

جسم محاط بالإسطوانة $x^2+y^2=a^2$ والمستويان $z=a, z=b$

نفرض أن كثافة الجسم عند نقطة (x, y, z) تساوى kz. لإيجاد مركز كتلة الجسم يلزم إيجاد كل من M_{xz}، M_{yz}، M_{xy} وكذلك كتلة الجسم m.

$$m=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{b} kz\,r\,dz\,dr\,d\theta=$$

$$=k\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^b\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a[\theta]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}k\pi a^2b^2$$

$$M_{xz}=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{b} kz\,y\,r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{b} kz\,(r\sin\theta)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=k[z^2/2]_0^b[r^3/3]_0^a[\cos\theta]_0^{2\pi}=0$$

$$M_{yz}=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{b} kz\,x\,r\,dz\,d\theta=k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{b} z\,r\cos\theta\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=k[z^2/2]_0^b[r^3/3]_0^a[\sin\theta]_0^{2\pi}=0$$

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{b} kz\,z\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=k[z^3/3]_0^b[r^2/2]_0^a[\theta]_0^{2\pi}=\frac{b^3}{3}\frac{a^2}{2}k(2\pi)=\frac{\pi k a^2b^3}{3}$$

من ثم $\overline{x}=\overline{y}=0$

$$\overline{z}\ M_{xy}/m=\frac{2}{3}b=\frac{2}{3}b$$

تمرينات ٤

١ – جسم مستوى على هيئة مربع رؤوسه (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) وكثافته عند أى نقطة $P(x, y) = xy^2$

أ – أوجد كتلة الجسم   ب – مركز كتلة الجسم.

٢ – إثبت أن مركز ثقل مساحة فى الربع الأول محددة باللمنسكيت $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ يعطى من

$$8\bar{x} = \pi a\sqrt{2} \ , \ 12\bar{y} = 3\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2}) - 2$$

٣ – جسم مستوى محدد بالمنحنيات $y^2 = 2x^2, y^2 = 4x$ والكثافة عند أى نقطة تساوى $1 + xy$ أوجد مركز كتلة الجسم.

٤ – جسم مستوى يشغل الحيز $x^2 + y^2 \le a$ وكثافته السطحية عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن مركز القرص.

أ – أوجد كتلة الجسم.

ب – العزم الأول للجسم حول الخط $x = -a$.

جـ – العزم الأول للجسم حول الخط $x + y = 2a$.

د – عزم القصور الذاتى للجسم حول محور عمودى على مستوى الجسم ويمر بنقطة الأصل.

٥ – أوجد مركز كتلة المنطقة المستوية داخل الكاردويد $r = a(1 + \cos\theta)$ وخارج الدائرة $r = a$.

٦ – إثبت أن مركز كتلة الصفيحة المحصورة بالمنحنيات $2y = 4a - x, x^2 = x^2 = 4ay$ يقع على مسافة a من محور y.

٧ – أوجد عزم التصور الذاتى لصفيحة منتظمة ذات كثافة سطحية k ثابتة

والتى حدودها هى $\theta = \pi$, $\theta = 0$ والكاردويد $r = (1 + \cos\theta)$

حول محور يمر بالقطب 0 عمودى على مستوى الصفيحة.

٨ – إثبت أن العــزم الأول لجسم مستوى حول المستقيم $x = -a$ يساوى

$M_y + ma$.

٩ – أوجد مركز كتلة هرم محصور بالمستويات

$$x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = 0 \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{b}{c} = 1$$

أوجد كذلك أنصاف أقطار الدوران اللولبى حول محاور الإحداثيات.

١٠– أوجد المراكز المتوسطة

(أ) للمساحة المحاطة بالسيكلويد

$$x = a(1 - \cos\theta) \ , \ y = a(\theta - \sin\theta)$$

(ب) مركز قوس السيكلويد السابق.

٤-٨ التكاملات الخطية (Line Integrals)

يقال عن منحنى C ممثلا بالمعادلة $y=f(x)$ $a\le x\le b$ (أو بالمعادلتين البارامتريتين $(y=y(t)\ ,\ x=x(t)$ أنه متصلا إذا كانت الدالة $y=f(x)$ (أو الدالتين البارامتريتين) متصلة (متصلتين). يسمى المنحنى ناعما إذا كانت المشتقة $f'(x)$ ($\dot{y}(t)\ ,\ \dot{x}(t)$) دوال متصلة) دالة متصلة. إذا كان المنحنى نقطتا بداية ونهاية متميزتين سمي منحنى بسيطا (simple arc). إذا إنطبقت نقطة البداية ونقطة النهاية سمى المنحنى مغلقاء المنحنى المغلق البسيط الذى لا يعبر نفسه يسمى منحنى جوردان (Jordan curve).يسمى منحنى ما مقوما (rectifiable) إذا كان طوله منتهيا.

يمكن تعميم مفهوم أن التكامل نهاية مجموع لتعريف التكامل الخطى $\int_c f(x,y)\,ds$ للدالة $f(x,y)$ على منحنى مقوم C،قسم المنحنى C إلى أقسام ΔS_i بالنقط $P_0=A\,,P_1,\,...\,,P_n=B$ نفرض أن المسقط الرأسي للقوس $P_i\,P_{i+1}$ هو Δy_i وأن مسقطه الأفقى Δx_i . من كل قوس من أقـــواس التقسيم ΔS_i نختار نقطة $(x_i\,,\,y_i)$ يمكن تكوين نوعين من المجموع

B
P_i
P_2
P_1
A

$$I=\sum_{i=1}^{n} f(x_i\,,\,y_i)\,\Delta x_i$$

$$J=\sum_{j=1}^{n} f(x_i\,,\,y_i)\,\Delta y_i$$

نهايـة المجموعين السـابقين حـال وجودهما يعرفـان نوعيـن مـن التكاملات الخطية

$$\int_C f(x,y)\,dx = \lim \Sigma\, f(x_i, y_i)\,\Delta x_i$$

$$\int_C f(x,y)\,dy = \lim \Sigma\, f(x_i, y_i)\,\Delta y_i$$

حيث تؤخذ النهاية عندما يزيد عدد التقسيمات بدون حد أى عندمـا يؤول $\max \Delta S_i$ إلى الصفر.

يعرف بطريقة مماثلة التكامل الخطى على منحنى فراغى

$$\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_i \\ \Delta y_i \to 0 \\ \Delta z_i}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\,\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\,\Delta z_i$$

للتكاملات الخطية الخواص الآتية:

١ - يتحدد أى تكامل خطى بموضـوع التكـامل وعنصـر التكـامل. ومنحنى التكامل وكذلك إتجاه التكامل.

تتغير إشارة التكامل الخطى بتغير إتجاه التكامل.

٢ - إذا جزأت نقطـة T علـى مسـار التكـامل C هـذا المسـار إلـى جزئين C_1, C_2 فإن

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

٣ - يعتبر إتفاقا إتجاه التكامل حول منحنى مغلق موجبا إذا كـانت المنطقة التى يحدها المنحنى المغلق على يسـار السـائر أو فـى

إتجاه ضد عقارب الساعة إذا كان المنحنى يحد منطقة بسيطة الإرتباط.

مثال:

لإيجاد $L=\int_C (x+y^2)\,dx+xy\,dy$ من النقطة $A(1,1)$ إلى النقطة $B(2,2)$

أ - على المستقيم الواصل بينهما

ب - على الخط المنكسر AC , CB حيث C هى النقطة (2,1)

أ - معادلة المستقيم AB هى $y=x$

$$L=\int_1^2 (x+x^2)\,dx+y^2\,dy=37/6$$

ب - معادلة المستقيم AC هى $y=1$ ومعادلة المستقيم CB هى $x=2$

$$L=\int_1^2 (x+1)\,dx+\int_1^2 2y\,dy=11/2$$

مثال ٣٠:

أوجد $L=\int_C x\,dy-y\,dx$ حيث C هو أحد أفرع منحنى الهيبوسيكلويد $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$

يتكون منحنى الهيبوسيكلويد من أربعة أفرع أحدها تتغير فيه t من $t=0$ إلى $t=\pi/2$

$$L=\int_0^{\pi/2} (a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t+a\sin^3 t.\, 3a\cos^2 t\sin t)\,dt$$

$$=3a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=3a^2\int_0^{\pi/2}(\cos^2 t-\cos^4 t)\,dt$$

$$=3a^2\left[\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{16}\right]=\frac{3a^2\pi}{16}$$

١-٨-٤ الشغل (Work)

أحد التطبيقات التقليدية للتكاملات الخطية هو الشغل المبذول بحقل قوى على جسيم يتحرك على مسار ما في هذا الحقل. نفرض أن حقل القوة F معرف كدالة من الموضع r كالآتى:

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

إذا تحرك الجسيم من نقطة متجه موضعها r إلى نقطة متجه موضعها $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ فإن الشغل المبذول δW فى هذه الحالة يساوى

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}$$

وعلى هذا فإن الشغل المبذول بحقل القوى F لكى يتحرك الجسيم من موضع A إلى موضع B على المنحنى C يساوى

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B P dx + Q dy + R dz$$

حيث يجرى التكامل على المنحنى C.

مثال ٣١:

أوجد الشغل المبذول بحقل قوى $\mathbf{F} = kr^{5/2}\hat{\mathbf{r}}$ حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. بينما $\hat{\mathbf{r}}$ هو متجه وحدة فى إتجاه متجه الموضع إذا تحرك الجسم المادى:

أ – على دائرة مركزها نقطة الأصل.

ب – على خط مستقيم من النقطة (1,2) الى النقطة (3,4).

أ – الشغل المبذول على الدائرة C

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C kr^{5/2}\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

وذلك لان المتجهين $\hat{\mathbf{r}}$, $d\mathbf{r}$ متعامدان.

ب – متجه الموضع لأى نقطة على المستقيم

$$r = i + 2j + t(2i + 2j)$$

$$dr = (2i + 2j)\, dt \qquad 0 \le t \le 1$$

المعادلات البارامتريه للمستقيم الواصل بين النقطين (3,4) , (1,2)

هى

$$x = (1-t) + 3t = 1 + 2t\ ,\ y = 2(1-t) + 4t = 2 + 2t$$

$$W = \int_c k(x^2+y^2)^{5/2} \frac{xi + yj}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (i\, dx + j\, dy)$$

$$= \int_0^1 k[(1+2t)^2 + (2+2t)^2]\, 2(4t+3)\, dt$$

$$2k\int_0^1 (32t^3 + 72t^2 + 56t + 15)\, dt = 150k$$

مثال ٣٢:

على أى منحنى من عـــائلة المنحـنيات $y = x^n$ يصـل التكامل $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (25xy - 8y^2)\, dx$ إلى أكبر قيمة.

نوجد أولا قيمة التكامل على منحنى ما من العائلة المعطاه

$$I(n) = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (25x^{n+1} - 8x^{2n})\, dx = 25/(n+2) - 8/(2n+1)$$

$$I'(n) = -\frac{25}{(n+2)^2} + \frac{16}{(2n+1)^2}$$

النهايات العظمى والصغرى تتواجد حيث

$$0 = I'(n) \rightarrow 16(n+2)^2 - 25(2n+1)^2 = 0 \rightarrow n = 1/2\ ,\ n = -13/14$$

بحساب $I''(n)$ عند $n=-13/14$ ، $n=1/2$ نجد أن $I''(1/2)$ سالبة بينما $I''(-13/14)$ موجبة وبذا فإن أكبر قيمة للتكامل تحدث على المنحنى $y=\sqrt{x}$

٤-٩ تكاملات خطية لاتتوقف على المسار

Line integrals independent of the path

التكاملات الخطية وكذلك التكاملات المتعددة إن حظيت بتميز خاص فى الدوال موضوع التكامل بالإضافة إلى مناطق التكامل قادت إلى نتائج مدهشة. نفرض أن الدالة $u(x,y)$ قابلة للتفاضل (ومن ثم وحيدة القيم) فى منطقة بسيطة أو متعددة الإرتباط D. التكامل

$$I=\int_A^B \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)=\int_A^B du=u_B-u_A$$

تم حسابه دون الإعتماد على أى مسار C من النقطة A إلى النقطة B من نقط D. فى هذه الحالة لا يتوقف التكامل على المسار. عندما يكون المسار C مغلقاً، تتطبق النقطتان A,B وينعدم التكامل. هكذا يمكن أن ننص على الآتى:

٤-٩-١ نظرية

الشروط اللازمة لكى لا يتوقف الخطى $\int_C P\,dx+Q\,dy$ على مسار C فى منطقة بسيطة الإرتباط D أن يكون للدوال P,Q مشتقات جزئية متصلة فى المنطقة وأن يكون موضوع التكامل تفاضلة تامة لدالة u وعندئذ ينعدم التكامل حول أى مسار مغلق C ناعم فى مقاطع من D .

نعلم أن الشرط اللازم حتى يكون المقدار $P\,dx+Q\,dy$ تفاضلة تامة لدالة u هو أن يكون $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. هذا الشرط يكون أيضاً كافياً إذا كانت كل من P,Q ، P_y,Q_x دوال متصلة.

وفي هذه الحالة فإن

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy=P\,dx+Q\,dy$$

يمكن تعميم النتيجة السابقة على مناطق متعددة الإرتباط بعمل مقاطع معترضة (Cross cuts) لجعل المناطق بسيطة الإرتباط.

مثال ٣٣:

لإثبات أن التكامل $I=\int_c 2y\cos x\,dy-y^2\sin x\,dx$

لا يتوقف على المسار وإيجاد قيمته من (0,0) إلى $(1,\pi)$ نضع

$$P=-y^2\sin x\quad,\quad Q=2y\cos x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2y\sin x=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

وبالتالي فإن التكامل لا يتوقف على المسار. لإيجاد الدالة u بحيث تكون تفاضلتها التامة هو موضوع التكامل

$$u=\int 2y\cos x\,dy=y^2\cos x+f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P=-y^2\sin x=-y^2\sin x+f'(x)\Rightarrow f'(x)=0$$

$$f(x)=constant\ a$$

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,\pi)}du=\int_{(0,0)}^{(1,\pi)}d\,y^2\cos x=[y^2\cos x]_{(0,0)}^{(1,\pi)}=-1$$

نستطيع أحيانا الحصول على الدالة u بالملاحظة مما يعطي وسيلة سهلة لحساب التكامل الخطي.

مثال ٣٤:

لإيجاد

$$I=\int_{(1,0)}^{(0,1)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$$

يمكن أن نعيد تجميع الحدود

$$I=\int x\,dx-y\,dy+x\,dy+y\,dx=\int d\frac{x^2}{2}-d\frac{y^2}{2}+dxy$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+xy\right]_{(1,0)}^{(0,1)}=-1$$

مثال ٣٥:

لإيجاد

$$\int_c \frac{(ax-by)\,dx+(bx+ay)\,dy}{x^2+y^2}$$

حيث c دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها d، نرى أن

$$P=\frac{ax-by}{x^2+y^2}\ ,\quad Q=\frac{bx+ay}{x^2+y^2}$$

$$Q_x=P_y=\frac{b(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

وجميعها دوال متصلة عدا عند نقطة الأصل الواقعة داخل المنطقة التي يحدها المنحنى c. لو كانت الدوال متصلة لوجب إنعدام التكامل ولكن بوضع $x=d\cos\theta\ ,\ y=d\sin\theta$ نحصل على

$$I=b\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta=2\pi b\neq 0$$

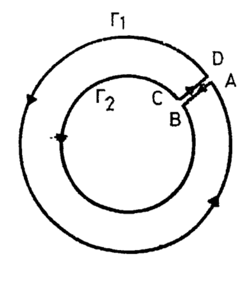
مما يؤكد وجوب تحقق شروط النظرية

مثال ٣٦:

إذا كانت P,Q دوال متصلة هى ومشتقاتها الجزئية الأولى وكانت $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ فى منطقة مغلقة بين دائرتين متحدتا المركز Γ_2 ، Γ_1 من ثم فإن

$$\int_{\Gamma_1} P\,dx+Q\,dy=\int_{\Gamma_2} P\,dx+Q\,dy$$

حقيقة:



بعمل خطوط قطع AB, CD تتحول المنطقة الحلقية إلى منطقة بسيطة الإرتباط وعندئذ يمكن تطبيق نظرية ١-٩-٤ عليها. من ثم من الشروط المعطاه ينعدم التكامل

$$\int_{\gamma} P\,dx+Q\,dy$$

حول المنحنى γ حيث

$$\gamma=\Gamma_1+AB-\Gamma_2+CD$$

$$0=\int_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=\left(\int_{\Gamma_1}+\int_{AB}-\int_{\Gamma_2}+\int_{CD}\right)(P\,dx+Q\,dy)$$

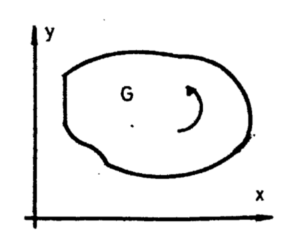
ولكن $\int_{AB}=-\int_{CD}$ بالتالى

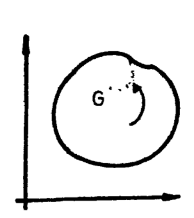
$$\int_{\Gamma_1} P\,dx+Q\,dy=\int_{\Gamma_2} P\,dx+Q\,dy$$

٤-١٠ نظرية جرين (Green's theorem)

سوف نعرض لنظرية تربط بين التكامل الخطى على منحنى مغلق بسيط و التكامل الثنائى على المنطقة المستوية التى يحدها المنحنى المغلق ويطلق عليها نظرية جرين

من المألوف إثبات نظرية جرين لأنواع خاصة من المناطق وبعد ذلك تعمم النظرية لمناطق أعم بتقسيمها إلى مناطق من النوع الخاص. نقول عن منطقة ما G فى R^2 أنها بسيطة (Simple) اذا كان أى مستقيم يوازى أحد محاور الإحداثيات يقطع حدود المنطقة Γ فى نقطتين على الاكثر (يسمح لهذا الخط أن تنطبق فترة منه على حدود المنطقة).



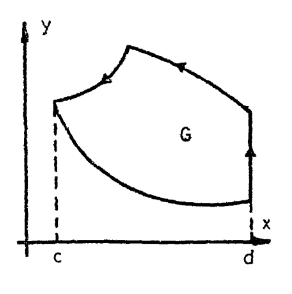


نظرية:

(نظرية جرين للمناطق البسيطة). نفرض أن G منطقة محدودة وبسيطة ومغلقة فى R^2 ذات حد Γ عبارة عن منحنى مغلق ناعم فى مقاطع. إذا كانت $P(x,y)$, $Q(x,y)$ دوال متصلة هى ومشتقاتها الجزئية فى G فإن

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{G}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$





نفرض أن حدود G قد قسمت إلى منحنى أعلى(Top curve) ومنحنى أسفل (bottom curve)،يمكن كتابة المعادلة البارامترية للمنحنى العلوى كالآتى:

$$x=x \qquad y=v(x)$$

والمنحنى السفلى كالآتى

$$x=x \quad , \quad y=u(x)$$

تكامل $P(x,y)\,dx$ على أى جزء من Γ مكون من خط رأسى يساوى صفر وذلك لأن $dx=0$

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\,dx=\int_{c}^{d}[P(x,u(x))-P(x,v(x))]\,dx$$

$$=\int_{c}^{d}-[p(x,y)]_{u(x)}^{v(x)}\,dx$$

$$=\int_{c}^{d}\int_{u(x)}^{v(x)}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=\int_{G}\int-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

بصورة مطابقة

$$\int_{\Gamma} Q(x,y)\,dy=\int_{G}\int\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

بالتالى

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{G}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

النتيجة السابقة يمكن تعميمها إلى مناطق يمكن تقسيمها إلى عدد منتهى من المناطق البسيطة. مثلا المنطقة الموضحة بالشكل ليست بسيطة ولكن يمكن تقسيمها ألى منطقتين بسيطتين Γ_1 , Γ_2 بالمنحنى Γ_3

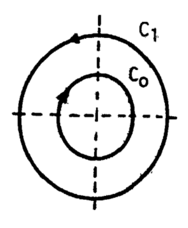
مما سبق يمكن أن نعيد كتابة نظرية جرين على مناطق أعم.

نظرية:

نفرض أن المنطقة G محددة ومغلقة فى R^2 وأن حدها Γ ناعم فى مقاطع. نفرض أيضا أن G يمكن تقسيمها إلى عدد منتهى من المناطق البسيطة. لأى دوال P,Q متصلة هى ومشتقاتها الجزئية الأولى

$$\int_\Gamma P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \int_G\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\, dy$$

مثال ٣٧:



نفرض أن G هى المنطقة الحلقية بتوجه موجب (Positively Oriented) المحصورة بين الدائرتين

$$C_0 : x^2 + y^2 = 4 , \quad C_1 : x^2 + y^2 = 16$$

لإيجاد $I = \int_{C = C_0 + C_1} xy\, dx - x\, dy$

نرى أولا أن التوجه الموجب على C_1 ضد عقارب الساعة وعلى C_0 مع عقارب الساعة.

سوف نطبق نظرية جرين بتقسيم G إلى أربع مناطق بسيطة بمحاور الإحداثيات.

يمكن كتابة المعادلات البارامترية للمنحنيات C_0 ، C_1 مع مراعاة توجه هذه المنحنيات كالآتى

$$C_0 : (x, y) = (2\cos t, -2\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$C_1 : (x, y) = (4\cos t, 4\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{C_0 - C_1} (xy\,dx - x\,dy) = \int_{C_0} (xy\,dx - x\,dy) + \int_{C_1} (xy\,dx - dy)$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\cos t\,(-\sin t)\,(-2\sin t)\,dt - (2\cos t)\,(-2\cos t)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} (4\cos t)\,(4\sin t)\,(-4\sin t)\,dt - (4\cos t)\,(4\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-56\cos t\sin^2 t - 12\cos^2 t)\,dt$$

$$= [-56\frac{\sin^3 t}{3} - 12\,(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4})]_0^{2\pi} = -12\pi$$

من جهة أخرى لتحويل التكامل الخطى إلى تكامل ثنائى وإستخدام الإحداثيات القطبية نحصل على

$$I = \int\int_G (-1 - x)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_2^4 (-1 - r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [-\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\cos\theta]_2^4\,d\theta = -\int_0^{2\pi} (6 + \frac{56}{3}\cos\theta)\,d\theta = -12\pi.$$

نعرض الأن لمعكوس نظرية جرين.

نظرية:

إذا كانت الدالتين P,Q متصلتين ومشتقاتهما الجزئية الأولى فى منطقة بسيطة الإرتباط D وكان $\int_c P\,dx+Q\,dy=0$ لأى منحنى مغلق ناعم فى مقاطع Γ فى D فإن $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial Y}$

الإثبات:

لإثبات العكس نفرض أن $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0$ عند أى نقطة $A(X_0,Y_0)$ من D. من إتصال P,Q يوجد جوار وليكن قرص K مركزه A وحدوده C وفيه $\frac{\partial Q}{\partial X}-\frac{\partial P}{\partial Y}>0$ من صيغة جرين

$$\int_k\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial Y}\right)dx\,dy=\oint_c P\,dx+Q\,dy>0$$

وهذا يناقض المعطيات. بالمثل إذا كانت $\frac{\partial Q}{\partial X}-\frac{\partial P}{\partial Y}<0$ نحصل أيضا على تناقض. من ثم $\partial Q(x_0,y_0)/\partial x=\partial P(x_0,y_0)/\partial y$ ويثبت المطلوب.

مثال ٣٨:

إستخدم صيغة جرين لإثبات الصيغة

$$\int\int_R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\oint_c\frac{\partial f}{\partial n}ds$$

حيث R منطقة محددة بمنحنى بسيط C، بينما $\frac{\partial f}{\partial n}$ هى المشتقة الإتجاهية للدالة f فى إتجاه العمودى الخارجى على C.

نعتبر

$$I=\oint_c-\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy$$

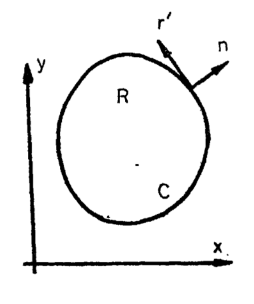
من صيغة جرين

$$I=\iint_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx\,dy = \oint_C \left(-\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy \right)$$

$$= \int_C \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds$$

موضوع التكامل السابق يمكن كتابته على هيئة حاصل ضرب قياسي لمتجهين

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}$$



حيث n هو متجه وحدة عمودى على المنحنى C إلى الخارج وذلك لأن المتجه

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}$$

هو متجه وحدة مماس للمنحنى وعمودى على n حيث

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} = 0$$

بالتالى

$$\iint_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx\,dy = \int_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C \frac{\partial f}{\partial n} ds$$

تمرينات ٥

١ – أوجد $\int_C 6x^3 y\,dx + 10xy^2\,dy$ على المنحنى $C: y=x^2$ من النقطة (1,1) إلى النقطة (2,4).

٢ – إحسب التكامل $\int_C y^4\,dx + x^2 y\,dy$ حيث $C: x=a\cos t,\ y=a\sin t$ من t=0 إلى $t=\pi/2$

٣ – إثبت أن $\oint_C y\,dx - x\,dy = -2\pi ab$ حيث C هو القطع الناقص $x=a\cos t,\ y=b\sin t$

٤ – إثبت أن $\oint_C x\,dy - y\,dx = -6\pi a^2$ حيث C هو منحنى السيكلويد $x=a(t-\sin t)\ ,\ y=a(1-\cos t)\quad 0 \le t \le 2\pi$

٥ – إحسب $\oint_C (x^2+y)\,dx + (2x+y^2)\,dy$ حول حدود المربع الذى رؤوسه (1,1) , (1,2) , (2,2) , (2,1)

٦ – إحسب $\int_{(0,0)}^{(1,-1)} (x+2y)\,dx + xy\,dy$ حيث مسار التكامل:

أولا : المنحنى $y=x^2$ وثانيا: المنحنى $y^2=x^3$

٧ – أوجد $\int_C (x\,dy + y\,dx)$ على المسارات الآتية

أ – قوس الدائرة $x^2+y^2=a^2$ الواصل بين النقطتين $(a,0)$, $(-a,0)$ بهذا الترتيب.

ب – الخطوط المستقيمة الواصلة بين النقط $(a,0)$ $(-a,0)$, $(-a,a)$, (a,a) بالترتيب

٨ – إثبت أن $\oint_C \dfrac{xy(x\,dy - y\,dx)}{x^4+y^4} = 0$ لأى منحنى مغلق C لا يمر بنقطة الأصل.

٩ – أوجد قيمة $\oint_C \dfrac{x^3\,dy - y^3\,dx}{(x^2+y^2)^2}$

أ – حيث C هو المربع الذى حدوده $x=\pm a,\ y=\pm a$

ب – الدائرة $x^2+y^2=a^2$

١٠ – أوجد $\int_c (y\cos x\, dx+\sin x\, dy)$ على المسار

أ – خط مستقيم يصل بين النقط $(0,0)$, $(\pi/2, \pi/2)$

ب – قوس القطع المكافئ $y=2x^2/\pi$ الواصل بين النقط $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

١١ – إثبت أن التكامل $\int_c (x^2+y^2)\, dx+2xy\, dy$ لا يتوقف على المسار C وأوجد قيمته من (0,0) إلى (0,3).

١٢ – بإختيار مسارين من النقطة (0,0) إلى النقطة (1,1) إثبت أن التكاملات الآتية تتوقف على المسار

$$\int_c (x^2y^2)\, dx+2xy\, dy \text{ , } \int_c (x^2-y^2)\, dx$$

١٣ – إثبت أن التكامل $\int (1+xy)\, e^{xy}\, dx+(x^2e^{xy}+2y)\, dy$

لا يتوقف على المسار وأوجد قيمته من (1,1) إلى (2,3).

١٤ – على أى عائلة المنحنيات $y=kx(1-x)$ يصل التكامل $\int_{(0,0)}^{(1,0)} y(x-y)\, dx$ إلى أكبر قيمة له.

١٥ – أوجد $\oint_\Gamma [(y^2-x^2)\, dx-2xy\, dy]/(x^2+y^2)$ حيث Γ هى دائرة الوحدة.

١٦ – إستخدم نظرية جرين لإثبات أن $\oint_c -y\, dx+x\, dy=6\pi$ حيث C هو حدود المنطقة الحلقية المكونة من الدائرتين $x^2+y^2=4$ $x^2+y^2=1$

١٧ – أوجد $\oint_c (x\, dx+y\, dy)/(x^2+y^2)$ حيث

$C=C_0+C_1$ $C_0: x^2+y^2=a^2$, $C_1: x^2+y^2=b^2$, $b>a$

ما علاقة التكامل بالدالة $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

١٨ – حقق صيغة جرين للتكامل $\oint_c (x^2+y)\, dx-xy^2\, dy$ مأخوذا على حدود مربع رؤوسه (0,1) , (1,1) , (1,0) , (0,0).

١٩ - حقق صيغة جرين للتكامل $\oint_c (x-y)\,dx+(x+y)\,dy$

مـأخوذا علـى المسـاحة المحـدودة فـى الربـع الأول المحصـورة بالمنحنيات $y=x^2\ ,\ x^2=y$

٢٠ - أوجد $\oint_c 3x^2y^2\,dx+2x^3y\,dy$ فى الإتجاه الموجب للمنحنى C حيث C هو القطع الناقص $x^2+4y^2=4$

٢١ - إحسب $\oint_c x\,dy-y\,dx$ حول المنحنى C فى المسألة السابقة.

٢٢ - وضح أن صيغة جرين لا تتحقق للدوال

$$u=-\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad v=\frac{x}{x^2+y^2}$$

على القرص R المعرف بالمتباينة $x^2+y^2\le 1$

٢٣ - إستخدم صيغة جرين لإثبات أن المساحة المحصـورة بمنحـى مغلـق بسيط C تعطى بالصيغة

$$A=\frac{1}{2}\int_c x\,dy-y\,dx$$

٢٤ - بوضع $Q=f\frac{\partial g}{\partial y}\ ,\ P=f\frac{\partial g}{\partial x}$ فى صيغة جرين إثبت أن

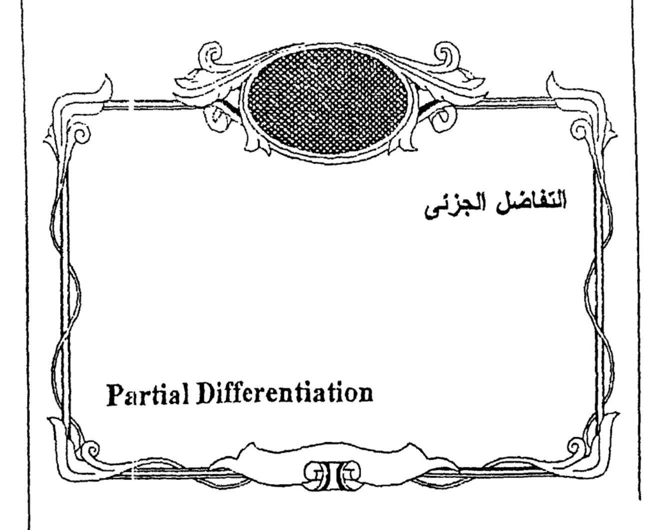
$$\iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx\,dy=\oint_c f\,dg$$

حيث R هى المنطقة المحصورة بالمنحنى البسيط C.

٢٥ - أثبت أن التكامل

$$I=\int(2x^2y^2+1)e^{x^2y^2}\,dx+[2x^3ye^{x^2y^2}+2y]\,dy$$

لاتتوقف على المسار وأوجد قيمته من (0.0) إلى (1.1)



التفاضل الجزئى

Partial Differentiation

١-٥ النهايات والإتصال (Limits and continuity)

سوف نعالج في هذا الباب دوال حقيقية من عدة متغيرات أى دوال من R^n إلى R مثل

$$u=u(x,y,z)=xyz \quad , \quad v=v(x,y)=x^2+4y \text{ ,etc.}$$

المتغيرات ... x,y,z تسمى متغيرات مستقلة وتسمى ... u,v متغيرات تابعة. للتبسيط، سوف نعالج دائما دوال وحيدة القيم من متغيرين أى دوال من R^2 إلى R حيث لهذه الدوال تمثيل هندسي (دالة متغيرين مستقلين تمثل سطحا) ولكن الطرق المستخدمة وكذلك النتائج يمكن تعميمها لدوال أكثر من متغيرين.

نبدأ بتعريف نهاية دالة متغيرين. نقول أن الدالة $f(x,y)$ تؤول إلى نهاية A عندما تقترب x من a وتقترب y من b ونكتب

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$$

إذا وفقط إذا كان لكل عدد موجب ε يوجد عدد $\delta>0$ بحيث

$$|f(x,y)-A|<\epsilon$$

لجميع قيم (x,y) بحيث

$$0<[(x-a)^2+(y-b)^2]^{1/2}<\delta$$

أى أن جميع قيم الدالة $f(x,y)$ لقيم (x,y) الواقعة في جوار نصف قطره δ ومركزه $(a\ ,b)$ تقع في جوار للنقطة A نصف قطره ε

يمكن الإستعاضة عن الشرط $0<[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{1}{2}}<\delta$ بالشرط
$|x-a|<\delta,\ |y-b|<\delta$

مثال ١:

$$f(x,y)=(x+y)\sin(x+y)\to 0\ \ as\ (x,y)\to(0,0)$$

$$|f(x,y)-0|=|x+y|\ \ |\sin(x+y)|$$

$$\le|x+y|$$

$$\le|x|+|y|<\epsilon\ \ for\ |x|\ ,\ \ |y|<\delta=\epsilon/2$$

مثال ٢: الدالة

$$f(x,y)=$$

$$1 \qquad x=-y$$

ليس لها نهاية بإقتراب (x,y) من $(0,0)$ لأننا إذا إعتبرنا أن x,y تقتربان من نقطة الأصل على المستقيم $y=mx$ فإن

$$f(x,mx)=\frac{1-m}{1+m}$$

وهذا المقدار يمكن أن يجرى على جميع الأعداد الحقيقية. نلاحظ أيضا فى هذا المثال أن:

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0}f(x,y)]=1\ \ ,\ \ \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0}f(x,y)]=-1$$

٥-٢ النهايات المكرره (Repeated Limits)

اكى تتواجد النهاية المزدوجة

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

يجب أن يكون للدالة f نفس النهاية على أى مسار إقتراب من النقطة

(a , b). النهاية خلال مسارين من نوع خاص لهما أهمية ويقودان إلى النهايات المكررة.

$$L_1=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) \quad , \quad L_2=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) .$$

من الطبيعى أن نقول أنه حال تواجد النهاية المزدوجة ستتواجد النهايات المكررة وتكون النهايات الثلاث متساوية . مع هذا فإن النهايات المكررة قد تتواجد دون أن تتواجد النهاية المزدوجة.

مثال ٣: نعتبر الدالة

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0$$

لدراسة وجود النهاية المزدوجة ندرس اقتراب (x , y) من(0 , 0)

على المسار y = mx

$$f(x,mx)=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

من جهة أخرى

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

أى أن النهاية المزدوجة ليس لها وجود.

٥-٣ الإتصال (Continuity)

تكون الدالة $f(x, y)$ متصلة عند نقطة (a, b) إذا كان $f(a, b)$ معرفا وكان

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

إتصال دالة فى (x, y) يستوجب إتصالها فى كل متغير على حده ولكن العكس غير صحيح كما أوضحنا فى مثال ٣.

٥-٤ المشتقات الجزئية (Partial derivatives) .

إذا بقيت y ثابتة فى الدالة $f(x, y)$ وأشتقت الدالة الناتجة بالنسبة إلى x فإننا نحصل على مشتقة الدالة f جزئيا بالنسبة إلى x والتى تكتب $\frac{\partial f}{\partial x}$ أو $f_x(x, y)$ وهكذا نعرف

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

بفرض تواجد النهاية.

بالمثل تعرف مشتقة الدالة f جزئيا بالنسبة y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

نلاحظ أن تعريف المشتقات الجزئية يناظر تعريف المشتقة العادية لدالة المتغير الواحد. بالتالي تتطابق قوانين تفاضل دالة أكثر من متغير مع قوانين تفاضل دالة المتغير الواحد.

مثال ٤: في الدالة

s x

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\,y^4+y\sin x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4x^2y^3-\cos x$$

مثال ٥: في الدالة

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y\,(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x(x^2+y^2)-2x\,y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

لإيجاد $f_x(0,0)$ يجب أن نعود إلى التعريف.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

أيضا $f_y(0,0)=0$.

يجب أن نلاحظ أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

ليس لها وجود، أى أن الدالة $f_x(x\ ,\ y)$ غير متصلة عند نقطة الأصل.

كذلك يجب أن نلاحظ أن الدالة f أيضا غير متصلة عند نقطة الأصل.

مثال ٦: العلاقتان $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ فى أربع متغيرات تمكننا من التعبير عن أى إثنين منها بدلالة الآخر. مثلا:

a) $x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$

b) $r^2 = x^2 + y^2\ ,\ \theta = \tan^{-1} y/x$

c) $r = x\sec\theta\ ,\ y = x\tan\theta$

من (a) $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$ ومن (b) $2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$

ومن (c) $\frac{\partial r}{\partial x} = \sec\theta$

هذه النتائج المتباينة نتجت من إختلاف المتغيرات التى قمنا بتثبيتها. أى أنه فى حالة دوال أكثر من متغير يجب الإشارة إلى المتغيرات المستقلة كأن نكتب

$$\frac{\partial r}{\partial x}\Big|_y = \cos\theta\ ,\ \frac{\partial r}{\partial x}\Big|_\theta = \sec\theta$$

يمكن تعميم مفاهيم دوال متغيرين لدوال أكثر من متغيرين من حيث النهايات والإتصال والإشتقاق.

مثال:

$$f(x,y,z) = xy^2z^3$$

$$f_x = y^2z^3\ ,\ f_y = 3xy^2z^2$$

أى تجمع من النقط (x, y) تسمى مجموعة (set). أى مجموعة من النقط (x,y) بحيث $|x-a|<\delta,\ |y-b|<\delta$ تسمى مربعا مفتوحا بينما مجموعات النقط (x,y) بحيث $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ تسمى قرصا مفتوحا مركزه (a,b) ولصف قطره δ وكلاهما جوار للنقطة (a,b). تسمى نقطة (a,b) نقطة حدية (boundary point) لمجموعة S إذا كان كل جوار للنقطة (a,b) (سواء كان مربعا أو قرصا مفتوحا يقطع كل من S ومكمل S، فى مجموعة غير خالية. تسمى مجموعة S مغلقة إذا إحتوت على نقاطها الحدية. تسمى نقطة P نقطة داخلية (interior point) لمجموعة S إذا وجد

جوار للنقطة P يقع بكامله داخل S. تسمى مجموعة S مفتوحة (open) إذا تكونت من نقط داخلية فقط. مثلا المجموعة $x^2+y^2<a^2$ هـــي مجموعة مفتوحة ونقطها الحدية هي $x^2+y^2=a^2$ وبالتالي فإن المجموعة $x^2+y^2\leq a^2$ تكون مغلقة. يقال أن مجموعة ما مرتبطة المسار (path connected) إذا كان كل نقطتين متميزتين من نقطها يمكن إيصالهما بمسار (صورة متصلة للفترة [0 , 1]) يقع بكامله داخل المجموعة.

أي مجموعة مفتوحة ومرتبطة المسار تسمى مجالا (domain). المنطقة (Region) هي مجال أو مجال مضاف إليه بعض أو كل نقطه الحدية. نقول أن $f(x,y)\in C$ في مجال D إذا وفقط إذا كانت $f(x,y)$ متصلة عند جميع نقط المجال D. ونقول أن $f(x,y)\in C$ عند نقطة حدية (a,b) من منطقة R حيث تعرف $f(x,y)$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b) \qquad (x,y)\in R$$

أي أن النقطة (x,y) تقترب من (a,b) من خلال نقط R، وهو تعريف يناظر إقتراب دالة المتغير الواحد من نقطة حدية من جهة واحدة. الدالة $f(x,y)\in C$ في منطقة R إذا كانت $f(x,y)$ متصلة عند كل نقطة من نقطة R.

٥-٥ نظرية القيمة المتوسطة (The mean - value theorem)

قبل عرض نظرية القيمة المتوسطة لدالة متغيرين نتذكر نظرية القيمة المتوسطة لدالة المتغير الواحد.

١-٥-ه نظرية: إذا كانت الدالة f(x) متصلة فى الفترة [a,b] وتواجدت $f'(x)$ فى الفترة (a,b)، من ثم يوجد عدد ξ , $a<\xi<b$ بحيث

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

نعرض الأن لنظرية القيمة المتوسطة لدالة متغيرين.

٢-ه-ه نظرية: إذا كان للدالة f(x,y) مشتقات جزئية متصلة فى مجال D فإنه لأى نقطتين (x,y), (x+h , y+k) من نقط D

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf_x(x+\theta_1 h,y)+kf_y(x+h,y+\theta_2 k)$$

حيث $0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1$

الإثبات. نضع

$$\Delta f=f(x+h,y+k)-f(x,y)=[f(x+h,y+k)-f(x+h,y)]$$
$$+[f(x+h,y)-f(x,y)]$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة لدالة المتغير الواحد على كل قوس فى الطرف الأيمن نحصل على

$$\Delta f=kf_y(x+h,y+\theta_2 k)+hf_x(x+\theta_1 h,y)$$

ليس هناك من سبب يجعلنا نفترض أن $\theta_1=\theta_2$

مثال ٧: نعتبر الدالة

$$f(x,y)=x^3+2y^2-y, \qquad (a,b)=(1,2)$$

$$\Delta f=f(1+h,2+k)-f(1,2)$$

$$=3h(1+h+h^2/3)+k[4(2+\frac{1}{2}k)-1]$$

$$:=hf_x(a+\theta_1 h,b)+kf_y(a+h,b+\theta_2 k)$$

$$=3h(1+\theta_1 h)^2+k[4(2+\theta_2 k)-1]$$

بمقارنة الأطراف المتناظرة نحصل على

$$1+h+h^2/3=1+2\theta_1 h+\theta_1^2 h^2 \rightarrow \theta_1^2 h^2+2\theta_1 h-h-h^2/3=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta_1=\frac{-2h\pm\sqrt{4h^2+4h^2(h+h^2/3)}}{2h^2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+h+h^2/3}}{h}$$

$$\theta_2=1/2$$

٦-٥ الدوال القابلة للتفاضل (Differentiable functions)

من أجل تحليل أدق نقدم فصلاً من الدوال يسمى فصل الدوال القابلة للتفاضل. نقول أن الدالة $f(x,y)$ قابلة للتفاضل عند نقطة (x,y) إذا كانت معرفة فى جوار لهذه النقطة مع تواجد كل من $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ بحيث

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\phi(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\psi(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

حيث

$$\phi(\Delta x,\Delta y),\ \psi(\Delta x,\Delta y)\rightarrow 0 \text{ as } (\Delta x,\Delta y)\rightarrow(0,0)$$

أى أن قابلية دالة للتفاضل تعنى وجود المشتقات الأولى مما يعنى إتصال الدالة.

مثال ٨: الدالة $f(x,y) = 2 - y + 2x^2 - x^2 y$ قابلة للتفاضل عند أى نقطة (x,y) لأن المشتقتين

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-1-x^2$$

متواجدتين عند أى نقطة وكذلك

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = (4x-2xy)\Delta x + (-1-x^2)\Delta y$$
$$+(2\Delta x - y\Delta x)\Delta x - (2x\Delta x + (\Delta x)^2 \Delta y$$

حيث يمكن أن نضع

$$\phi(\Delta x, \Delta y) = 2\Delta x - y\Delta x \quad , \quad \psi(\Delta x, \Delta y) = -(2x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

مثال ٩: الدالة $f(x,y) = |x| (1 + y)$ متصلة عند $(0,0)$ ولكنها غير قابلة للتفاضل

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) = |\Delta x| (1+\Delta y)$$

$$f(\Delta x, \Delta y) \to f(0,0) \text{ as } \Delta x, \Delta y \to 0 \to f(x,y) \in C \text{ at } (0,0)$$

$$f(\Delta x, 0) = |\Delta x| \to f(\Delta x, 0)/\Delta x = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

ولكن النهاية $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ غير معرفة وبالتالي فإن $f_x(0,0)$ ليس لها وجود

مثال ١٠: نعتبر الدالة

$$f(x,y) \begin{cases} = x & |y| < |x| \\ = -x & |y| \geq |x| \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

$$f(\Delta x, \Delta x) = -\Delta x$$

$$= f_x \Delta x + \phi(\Delta x, \Delta x)\Delta x + \psi(\Delta x, \Delta x)\Delta x$$

بعد القسمة على Δx وإتجاه Δx إلى الصفر نحصل على تناقض. أى أن الدالة f غير قابلة للتفاضل.

٧-٥ المشتقات الجزئية من الرتب الثانية ومن الرتب الأعلى:

حيث أن المشتقات الجزئية لدالة f(x,y) هي بدورها دوال من (x,y) وعليه قد يكون لها مشتقات جزئية. المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية تعرف كالتالى:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x+h,y) - f_x(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f_y(x,y+k) - f_y(x,y)}{k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = f_{xy}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,y) - f_y(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\{\frac{1}{h} \lim_{k\to 0}[\frac{f(x+h,y+k) + f(x+h,y)}{k} - \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}]\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk}$$

$$= \lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} \frac{\Delta^2 f}{hk}$$

بالمثل

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{yx}(x,y) = \lim_{k\to 0} \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 f}{hk}$$

أى أن المشتقات الجزئية الثانية المختلطة تنتج من النهايات المكررة للمقدار $\frac{\Delta^2 f}{hk}$ وهما تتساويان عندما تتساوى النهايات المكررة.

بنمط مماثل تعرف المشتقات الجزئية العليا. على سبيل المثال المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة هى:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

المشتقات المختلطة مثل f_{yxx}, f_{xxy} قد تتساوى أو لا تتساوى.

نقول أن $f(x,y)\in C^n$ في منطقة R إذا وفقط كان

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y},\ \ldots\ ,\ \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\in C\ \ in\ R.$$

من الممكن إثبات أنه إذا كانت $f(x,y)\in C^n$ فإن

$f(x,y)\in C^k\ (k=0,1,2,\ldots,n-1)$ مثلما هو الحال فى دالة المتغير الواحد.

تساوى المشتقات المختلطة

١-٧-٥ نظرية: إذا تواجدت المشتقات f_x , f_y, f_{yx} فى جوار نقطة (a,b) وكانت f_{yx} متصلة عند (a,b) فإن f_{xy} تتواجد أيضا ويكون

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

الإثبات. نفرض أن

$$\phi(x)=f(x,y+k)-f(x,y)$$

$$\Delta^2 f=\phi(x+h)-\phi(x)$$

$$=h\phi'(x+\theta_1 h)\qquad 0<\theta_1<1$$

$$=h\, f_x(x+\theta_1 h,y+k)-f_x(x+\theta_1 h,y)$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة الأخيرة فى y نحصل على العلاقة الآتية قرب (a,b)

$$\Delta^2 f = hk\, f_{yx}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) \qquad 0<\theta_2<1$$

حيث أن f_{yx} متصلة عند a,b، بالتالى:

$$\Delta^2 f = hk\, f_{yx}(a,b) + \varepsilon$$

حيث $\epsilon \to 0$ عندما $h, k \to 0$، من ثم

$$f_{xy}(a,b) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{\Delta^2 f}{hk}$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}[f_{yx}(a,b)+\varepsilon]$$

$$= \quad f_{yx}(a,b)$$

نظرية أخرى تتطلب تواجد وإتصال مشتقات الرتبة الأولى هى:

٢-٧-٥ نظرية: إذا تواجدت f_x, f_y فى جوار (a,b) وكانتا قابلتين للتفاضل عند (a,b) فإن $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

لإثبات النظرية السابقة نحتاج للنظرية التمهيدية الآتية.

٣-٧-٥ نظرية تمهيدية (Lemma)

لأى دالة f(x,y)

$$\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) = \Delta_y \Delta_x f(x_0, y_0)$$

حقيقة

$$\Delta_x \Delta_y f(x_0, y_0) = \Delta_x f(x_0, y_0+\Delta y) - \Delta_x f(x_0, y_0)$$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

$$\Delta_y \Delta_x f(x_0, y_0) = \Delta_y f(x_0+\Delta x, y_0) - \Delta_y f(x_0, y_0)$$

$$=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0+\Delta y)+f(x_0, y_0)$$

إثبات النظرية الأساسية

نفرض (x_0,y_0) نقطة إختيارية في المجال حيث $f\in C^2$. من ثم

$$\Delta_x\Delta_y f(x_0, y_0)=\Delta_y\Delta_x f(x_0, y_0)$$

$$\Delta_y\Delta_x f(x_0, y_0)=\Delta_y[f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)]$$

$$=\Delta_y f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x \qquad 0<\theta_1<1$$

$$=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x$$

$$=f_{yx}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y$$

بالمثل

$$\Delta_x\Delta_y f(x_0, y_0)=f_{xy}(x_0+\theta_3\Delta x, y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y$$

من التساوى فى النظرية التمهيدية وبالقسمة على $\Delta x\Delta y$ ثم ندعهما يقتربان من الصفر نحصل على التساوى المطلوب.

مثال ١١: فى هذا المثال نعرض لدالة f حيث $f_{xy}\neq f_{yx}$. نعتبر

$$f(x,y)=2xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad x^2+y^2\neq 0 \quad ,$$

$$f(0,0)=0$$

يمكن إثبات بالقوانين الأساسية أن $f_{xy}=f_{yx}$ عندما لا تكون (x,y) هى نقطة الأصل. هذه القواعد لاتطبق عند نقطة الأصل بسبب إنعدام مقام الكسر، وعلينا أن نلجأ للمبادئ الأولية.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

$$f_x(x,y)=2y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+2xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad x^2+y^2\neq 0$$

$$f_y(x,y)=2x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-2xy\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad x^2+y^2\neq 0$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-2\Delta y}{\Delta y}=-2$$

من المهم أن نميز بين $f_{xy}(0,0)$ وبين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_{xy}(x,y)$ حيث أن الدالـة $f_{xy}(x,y)$ ليست متصلة عند $(0,0)$.

تمارين ١

١ - أوجد

$$i)\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin xy}{\cos(x+y)}, \qquad ii)\ \frac{\partial}{\partial y}x^2 e^{xy}$$

$$iii)\ f_x(x,y),\ f_y(1,2)\ if \quad f(x,y)=\tan^2(x^2-y^2)$$

٢ - إذا كانت

$$u-v+2w=x+2z\ ,\ 2u+v-2w=2x-2z,$$

$$u-v+w=z-y$$

أوجد

$$\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial y}$$

٣ - إذا كانت $u=x^{yz}$ أوجد

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

٤ - إذا كانت $u=x^y$ فإثبت أن $u_{xxy}=u_{xyy}$

٥ - أوجد $f_y(0,0)$ ، $f_x(0,0)$ إن كان لهما وجود للدوال $f(x,y)$ الآتية:

$$(a)\ \frac{xy^2}{x^2+y^2},\quad (b)\ x\sin\frac{1}{x^2+y^2}\quad (c)\ \frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

٦ - إثبت أن الدالة

$$f(x,y)=\frac{x^6-2y^3}{x^2+y^2}\qquad x^2+y^2\neq 0$$

$$f(0,0)=0$$

قابلة للتفاضل عند (0,0).

٧ – إثبت أن $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ غير قابلة للتفاضل عند (0,0)

٨ – أوجد θ_1,θ_2 فى نظرية القيمة المتوسطة للدالة

$$f(x,y)=x^2+3xy+y^2 \quad a,b=0,\ \Delta x=1 \quad \Delta y=-1$$

٩ – إذا كانت

$$f(x,y)=x^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-y^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \quad xy\neq 0,$$

$$f(x,0)=f(0,y)=f(0,0)=0$$

إثبت أن $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

١٠ – دع (x,y) نقترب من (0,0) على المستقيم $y=-x$ أوجد

$$\lim \frac{\sin xy+xe^{x}-y}{x\cos y+\sin^2 y} \qquad \lim \frac{e^{xy}-1}{\sin x\ \ln(1+y)}$$

$$\lim \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

١١– أوجد

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}$$

١٢ – أوجد النهايات بالتتابع عندما $(x,y)\to(0,0)$ للدوال الآتية

$$(i)\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)\ ,\ f(0,0)=0$$

$(ii)\ \frac{1}{x}\sin xy \quad x\neq 0 \qquad f(0,y)=y$

$(iii)\ \frac{\sin x-\sin y}{\tan x-\tan y} \quad \tan x\neq\tan y\ ,$

$\cos^3 x \qquad \tan x=\tan y$

٨-٥ المتغيرات التابعة والمستقلة:

عند صياغة مسألة ما تحتوى على متغيرات عديدة قد يكون من غير الممكن أن نحدد من صياغة المسألة إى المتغيرات مستقلة وأيها تابعة. لذا وجب عند علاج مسألة من هذا النوع أن ننص على المتغيرات التابعة والمستقلة أو أن نتعامل مع كل الحالات الممكنة.

مثال ١٢: أوجد $\frac{\partial u}{\partial x}$ إذا كان $u=f(x,y)\ ,\ y=g(x,z)$

من المطلوب نرى أن x متغير مستقل بينما u تابع. وحيث أنه يوجد متغيران تابعان مناظران للمعادلتين من ثم فإنه يوجد حالتان:

الحالة الأولى: نعتبر u , z متغيرين تابعين وأن x , y متغيران مستقلان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x\ \ ,\ \ 0=g_x+g_z\ \frac{\partial z}{\partial x}\rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x\ ,\ \ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{g_x}{g_z}$$

الحالة الثانية: نعتبر u , y متغيرين تابعين للمتغيرين المستقلين (x , z)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial x}\ \ ,\ \ \frac{\partial y}{\partial x}=g_x\rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x+f_y g_x\ \ ,\qquad \frac{\partial y}{\partial x}=g_x$$

مثال ١٣: إذا كانت $u=ax+by$ ، $v=bx-ay$ فاثبت أن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v=a^2/\left(a^2+b^2\right)$$

حيث الرمز أسفل المشتقة يعنى المتغير المستقل الآخر.

لإيجاد $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ نعتبر x,y متغيرات مستقلة. من ثم $\frac{\partial u}{\partial x}=a$

لإيجاد $(\frac{\partial x}{\partial u})_v$ نعتبر u , v متغيرات مستقلة. بتفاضل كل معادلة من معادلات التحويل

$$1=a\frac{\partial x}{\partial u}+b\frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad 0=b\frac{\partial x}{\partial u}-a\frac{\partial y}{\partial u}$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $\partial x/\partial u=a/(a^2+b^2)$

أى أن

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_y\,(\frac{\partial x}{\partial u_v}=a^2/(a^2+b^2)$$

٩-٥ التفاضلات (Differentials)

نفرض أن الدالة $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل، من ثم

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\Phi(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\psi(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

حيث تؤول كل من ψ , Φ إلى الصفر عندما تؤول $(\Delta x,\Delta y)$ إلى $(0,0)$

نعرف تفاضلة z والتى نرمز لها بالرمز dz بأنه الجزء الرئيسى (الجزء الخطى فى $(\Delta x,\Delta y)$)

$$dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

وأيضا نعرف تفاضلات المتغيرات المستقلة dy , dx بأنها التغيرات $\Delta x,\Delta y$ على الترتيب. من ثم

$$dz=df(x,y)=f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy$$

تسمى dz التفاضلية الكلية (Total differential) للمتغير z.

إذا كانت $z=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ فإن

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$$

مثال ١٤: المتغيرات المستقلة x,y,z تحقق العلاقة $f(x,y,z) = 0$. سوف نثبت أن

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

حيث الأدلة أسفل المشتقة تعني نفس المعنى كما في المثال السابق.

بأخذ تفاضلة العلاقة $f(x,y,z) = 0$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

حيث dx,dy,dz تغيرات صغيرة في x,y,z. يمكن الحصول على $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ كعملية نهاية للنسبة $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$ عندما تؤول Δy إلى الصفر بينما تبقى z ثابتة أي أن

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$i.e. \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_z = -f_y / f_x$$

بالمثل

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -f_z / f_y \quad , \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -f_x / f_z$$

تنتج العلاقة المطلوبة بالضرب.

مثال ١٥: إذا كانت $z = x^3 + 2y^2 - xy$ أوجد $\Delta z - dz$

$$\Delta z = (x+\Delta x)^3 + 2(y+\Delta y)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^3 - 2y^2 + xy$$

$$= 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4y\Delta y + 2(\Delta y)^2 - x\Delta y - y\Delta x - \Delta x \Delta y$$

$$dz = f_x \Delta x + f_y \Delta y = (3x^2 - y)\Delta x + (4y - x)\Delta y$$

$$\Delta z - dz = 3x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 + 2(\Delta y)^2 - \Delta x \Delta y$$

يجب أن نلاحظ أن التفاضلة الكلية du لدالة من n من المتغيرات هى مجموعة n من الحدود محتوية على تفاضلات للمتغيرات المستقلة dx_i كذلك هى تقريب جيد للتغير Δu بمعنى أن المقدار $(\Delta u - du) / \sqrt{\Sigma (\Delta x_i)^2}$ يؤول إلى الصفر عند تقترب كل Δx_i من الصفر. من ثم يصبح لدينا أساسا فى إستخدام التفاضلات فى الحسابات التقريبية.

تفاضلات الدوال غير بسيطة التركيب تبنى على صيغة تفاضلة دالة سيان كانت المتغيرات المتداولة مستقلة أو لا. مثلا.

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = \frac{\partial}{\partial u}(uv)\,du + \frac{\partial}{\partial v}(uv)\,dv = v\,du + u\,dv$$

١٠-٥ التفاضلات التامة (Exact differentials)

عرفنا تفاضلة دالة بأنها الجزء الرئيسى (الخطى) فى التغير فى المتغير التابع الناتج من تغيرات فى المتغيرات المستقلة. حيث أن تفاضلة المتغير المستقل تساوى التغير فيه، بالتالى إذا كانت u دالة متغيرين x,y فإن

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \qquad (1)$$

أى تعبير على الهيئة

$$P dx + Q dy \qquad (2)$$

(بإفتراض أن الدوال P,Q لها مشتقات جزئية متصلة) يسمى فاضلة تامة إذا وجدت دالة u بحث $du = P\,dx + Q\,dy$.

نعرض للشروط اللازمة والكافية حتى تكون (2) تفاضلة تامة.

نفرض أن (2) تفاضلة تامة، أى توجد دالة u بحيث

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=P\,dx+Q\,dy$$

يؤدى هذا بدوره إلى أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q$$

ولكن $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ تؤدى إلى أن

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (3)$$

وهو الشرط اللازم حتى تكون (2) تفاضلة تامة. سوف نثبت أيضا أن هذا الشرط كاف وذلك بأن نكون دالة u إعتمادا على تحقق (3) تفاضلتها هى (2).

من الشرط $\frac{\partial u}{\partial x}=P$ نحصل على $u=\int P\,dx+g(y)$

حيث ثابت التكامل g(y) هو دالة إختيارية فى y، أى أنه لإيجاد u وجب إيجاد g(y)

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q=\left(\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right)+g'(y)$$

$$g'(y)=Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx$$

$$i.e, \qquad g(y)=\int \left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy$$

شرط أن يكون التكامل دالة فـي y فقط. حقيقة، الدالـة g داله فى y فقط وذلك لأن

$$\frac{\partial}{\partial x}\{Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

إستنادا إلى (3).

مثال ١٦: لإثبات أن $(2x+e^x\sin y)\,dx+(3y^2+e^x\cos y)\,dy$ تفاضلة تامة لدالة u و إيجاد هذه الدالة نضع

$$P=2x+e^x\sin y \quad , \quad Q=3y^2+e^x\cos y$$

الدوال P,Q لهما مشتقات أولى متصلة وكذلك

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

أى أن التفاضلة المعطاه تفاضلة تامة.

لإيجاد الدالة u

$$u=\int (2x+e^x\sin y)\,dx=x^2+e^x\sin y+g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q=g'(y)+e^x\cos y=3y^2+e^x\cos y$$

$$i.e.\quad g'(y)=3y^2 \rightarrow g(y)=y^3$$

بالتالى $u=x^2+y^3+e^x\sin y$

التفاضلة الكلية لدالة ثلاث متغيرات $v(x,y,z)$ تكون بالهيئة

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz$$

وعلى هذا فإن أى صيغة

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz \qquad (4)$$

تكون تفاضلة تامة لدالة v إذا كانت

$$P=\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial v}{\partial y},\quad R=\frac{\partial v}{\partial z}$$

وهذا بدوره يؤدى إلى

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y} \qquad (5)$$

يمكن أيضا التحقق من أن الشروط (5) شروط كافية بفرض أن للدوال P,Q,R مشتقات أولى متصلة حتى تكون الصيغة (4) تفاضلة كلية (أو تامة) لدالة. الشروط (5) يمكن أيضا كتابتها بالهيئة.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

محدد الطرف الأيسر يرمز له بالرمز $\nabla\times\mathbf{F}$ (ويقرأ $curl\ \mathbf{F}$) حيث

$$\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$$

أى تعبير على الهيئة (4) قد يمكن جعله تفاضلة تامة لدالة u بضربه فى معامل مكامل ϕ أى يصبح التعبير

$$\phi P\,dx+\phi Q\,dy+\phi R\,dz$$

تفاضلة تامه لدالة u.في حالة ثلاث متغيرات أو أكثر ليس من الممكن دائما إيجاد مثل هذه الدالة في ظل تحقق (5) ولكن من الممكن إيجاد مثل هذه الدالة إذا كانت P,Q,R تحقق الشرط التالى (بفرض أن للدوال P,Q,R مشتقات جزئية متصلة).

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \quad (6)$$

حقيقة

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$=\phi P\,dx+\phi Q\,dy+\phi R\,dz\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\phi P\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\phi Q\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\phi R$$

من التساوى $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ ونظائره نحصل على

$$\phi\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\frac{\partial \phi}{\partial x}-P\frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (7)$$

$$\phi\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)=R\frac{\partial \phi}{\partial y}-Q\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (8)$$

$$\phi\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=P\frac{\partial \phi}{\partial z}-R\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad (9)$$

بجمع $R(7)+P(8)+Q(9)$ نحصل على الشرط اللازم (6)

الشرط (6) يمكن أيضا كتابة بالهيئة

$$0=\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=$$

$$= (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$$

حيث $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$

١١-٥ مشتقات دوال مركبة. قاعدة التسلسل

(Differentiation of composite functions. Chain rule)

نفرض أن $z = z(x,y)$ دالة قابلــة للتفاضل فـى منطقـة مــا R وأن x,y دوال قابلة للتفاضل فى متغيرات u,v نعلم أن

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

حيث $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (0,0)$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$،

بالقسمة على Δu وإيجاد النهاية عندما تؤول Δu إلى الصفر نحصل على

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

بالمثل

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

قواعد إستنتاج مشتقة دالة دالة تسمى قواعد التسلسل.

إذا كانت $z = z(x,y)$ قابلة للتفاضل وكانت x,y دوال قابلــة للتفاضل من متغير t فإن

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

إذا كانت $u = f(x)$ وكانت $x = g(r,s,t)$ فإن

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{du}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}$$

يمكن تطبيق قواعد التسلسل لإيجاد مشتقات من رتب أعلى.

مثلا إذا كانت $z = z(x,y)$ وكانت $y = y(u,v)$ ، $x = x(u,v)$ فإن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right]$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial x}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right] +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right]$$

مثال: إذا كانت f دالة من (x,y) وكانت

$$u = e^x \cos y \qquad , \qquad v = e^x \sin y$$

فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y \frac{\partial f}{\partial u} + e^x \sin y \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$= u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}$$

مثال: إذا كانت $u = u\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ فاثبت أن

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

بوضع

$$r = \frac{y-x}{xy} \qquad\qquad s = \frac{z-x}{xz}$$

نحصل على

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = 0 = \frac{\partial s}{\partial y}$$

من ثم

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial s}, \quad y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial s}$$

بالجمع نحصل على المطلوب.

مثال ١٧: إذا كانت $y = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta$ وكانت u دالة من x,y

فإن

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial y}{\partial y} r\cos\theta$$

بحل المعادلتين الخطيتين السابقتين فى $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

المعادلتان الأخيرتان يعبران عن تكافؤ المؤثرات

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \equiv \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

بالنسبة للتحويل المعطى.

يمكن إيجاد $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ كالآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}) \quad (\cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta})$$

$$= \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} +$$

$$+ \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

بالمثل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}) \quad (\sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta})$$

$$= \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$- \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

بجمع العلاقتين الأخيرتين نحصل على

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

مثال ١٨:

إذا كانت z دالة من x,y وكانت $x = \cosh u \cos v$, $y = \sinh u \sin v$

فأوجد

$$(i) \quad (\frac{\partial z}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2 \quad , \quad (ii) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

معادلات التحويل تكتب من

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\sin h\, u\cos v\frac{\partial z}{\partial x}+\cos h\, u\sin v\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial v}=-\cos h\, u\sin v\frac{\partial z}{\partial x}+\sin h\, u\cos v\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\rightarrow (\frac{\partial z}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2=(\sin h^2 u\cos^2 v+\cos h^2 u\sin^2 v)$$

$$x\,[\,(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2]$$

$$\sin h^2 u\cos^2 v+\cos h^2 u\sin^2 v=\cos^2 v(\cos h^2 u-1)$$

$$+\cos h^2 u(1-\cos^2 v)\quad =\cos h^2 u-\cos^2 v$$

$$i.e.\qquad (\frac{\partial z}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2=(\cos h^2 u-\cos^2 v)$$

$$x[\,(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2]$$

لإيجاد (ii) نضع مشتقات الرتبة الأولى بصورة خاصة

$$\frac{\partial z}{\partial u}+i\frac{\partial z}{\partial v}=\sin h\, u\ \cos v\ \ (\frac{\partial z}{\partial x}+i\frac{\partial z}{\partial y})+$$

$$+\ \cos h\, u\sin v\qquad (\frac{\partial z}{\partial y}-i\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$=\sinh(u-iv)\quad (\frac{\partial z}{\partial x}+i\frac{\partial z}{\partial y})\qquad *$$

بوضع i- بدلا من i نحصل على

$$\frac{\partial z}{\partial u}-i\frac{\partial z}{\partial v}=\sin h\,(u+iv)\quad (\frac{\partial z}{\partial x}-i\frac{\partial z}{\partial y})$$

بتطبيق المؤثر $\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}$ على المعادلة .

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u} + i\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= \cosh(u-iv)\left[\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)(u-iv)\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$+ \sinh(u-vi)\left[\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \cosh(u-iv)\,[1-1]\left(\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y}\right)]$$

$$+ \sinh(u-iv)\sinh(u+iv)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\cosh 2u - \cosh 2iv)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}\right)$$

$$= (\cosh^2 u - \cos^2 v)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

مثال ١٩: إذا كانت f دالة من u حيث $u = ax^2 + 2hxy + by^2$

وكانت $f(u)$ عندما يعبر عنها كدالة من (x,y) تأخذ الهيئة $g(x,y)$ فإن

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 2u\frac{df}{du}$$

باشتقاق العلاقة $f(u) = g(x,y)$ بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}(2ax + 2hy) \rightarrow xg_x = (2ax^2 + 2hxy)\frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du}(2hx + 2by) \rightarrow yg_y = (2hxy + 2by^2)\frac{df}{dy}$$

بالجمع نحصل على العلاقة المطلوبة.

مثال ٢٠: إذا عرفت العلاقة $g(u^2-x^2, u^2-y^2, u^2-z^2)$ المتغير u كدالة فى x,y,z فإن

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{u}$$

لإثبات العلاقة المطلوبة نضع $X=u^2-x^2,\ Y=u^2-y^2,\ Z=u^2-z^2$

تصبح العلاقة $g(X,Y,Z)=0$. بالإشتقاق بالنسب إلى كل من x,y,z نحصل على

$$g_X\frac{\partial X}{\partial x}+g_Y\frac{\partial Y}{\partial x}+g_Z\frac{\partial Z}{\partial u}=0\rightarrow$$

$$\rightarrow g_X\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}-2x\right)+g_Y\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+g_Z\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \qquad (1)$$

بالمثل

$$g_X\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+g_Y\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}-2y\right)+g_Z\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (2)$$

$$g_X\left(2u\frac{\partial u}{\partial z}\right)+g_Y\left(2u\frac{\partial u}{\partial z}\right)+g_Z\left(2u\frac{\partial u}{\partial z}-2z\right)=0 \qquad (3)$$

بحذف g_X, g_Y, g_Z نحصل على العلاقة المطلوبة.

تمارين ٢

١ - أ) أوجد $\Delta z-dz$ حيث $Z=x^2y^2$

ب) إذا كانت $f(x,y)=x+x^3y^2-4\log x-10\ln y$

أوجد $df(1,2)$

٢ - نفرض أن z دالة من x,y وأن $u=ax+by,\ v=ay-bx$ إثبت أن

$$Z_{xx}+Z_{yy}=(a^2+b^2)\ (Z_{uu}+Z_{vv})$$

٣ - بتبديل المتغيرات x,t إلى المتغيرات u,v بالعلاقات $u=x-at\ ,\ v=x+at$ إثبت أن $y_{xx}-y_{tt}=a^2y_{uv}$

٤ - لأى دالة $f(x,y)$ حيث $x=e^u\cosh v,\ y=e^u\sinh v$
إثبت أن

$$(i)\qquad \frac{\partial f}{\partial u}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial v}=y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$(ii)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}=xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+(x^2+y^2)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

٥ - إذا كانت $\omega=f(y-z,\ z-x,\ x-y)$ فإثبت أن $\omega_x+\omega_y+\omega_z=0$

٦ - إذا كانت ω دالة من u,v وكانت u,v دوال من x,y بحيث

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

إثبت

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\ \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}\right]$$

٧ – إذا كانت z دالة من x , y وكانت $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ فبثبت أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = e^{2u} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

٨ – إذا كانت $z = f(x,y)$ وكانت $v = 2xy$, $u = x^2 - y^2$ إثبت أن

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4(x^2+y^2)\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$$

٩ – أوجد قيم الثوابت a,b بحيث يحول التعويض

$v = x + by,\ u = x + ay$ المعادلة

$$9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 9\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

إلى $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$

١٠ – إذا كانت $y = v + e^{-v}\cos u$, $x = u + e^{-v}\sin u$

أوجد

$$\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

١١ – إذا تحولت الدالة f(x,y) إلى الدالة g(u,v) بالتحويل

$v = \frac{x}{y}$, $u = x^2 + y^2$ إثبت أن

(i) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2u\frac{\partial g}{\partial u}$$

(ii) $$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = (1+v^2)\frac{\partial g}{\partial v}$$

١٢ - إذا كانت $ux = v^2 + y$ ، $vy = x^2 + 2u^2$

أوجد $\frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$

١٣ - إذا كانت $u = x + y$ ، $v = \sqrt{xy}$ وكانت z دالة من x , y

اثبت أن $xz_x + yz_y = uz_u + vz_v$

١٤ - إذا كانت $z(x, y) = f(u, v)$ حيث

$$v = y\,\phi\left(\frac{x}{y}\right) \quad , \quad u = x\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

اثبت أن

$$xz_x + yz_y = uf_u + vf_v$$

١٥ - إذا إرتبطت المتغيرات x , y , z بالعلاقة $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

وكان $\phi(x, y, z) = x^3 y^2 z$ أوجد $\phi_x(1, 1, 1)$ عندما

تكون المتغيرات المستقلة هي: (أ) x , y ، (ب) x , z

١٦ - إذا إرتبطت المتغيرات x , y , z بالعلاقات

$$f(x, y, z) = 0 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 = const$$

إثبت أن

$$\frac{dy}{dx} = -(zf_x - xf_z)/(zf_y - yf_z)$$

١٧ - إذا كانت $x = \frac{au + bv}{u^2 + v^2}$ ، $y = \frac{bu - av}{u^2 + v^2}$

إثبت أن

$$v\frac{\partial x}{\partial u} - u\frac{\partial x}{\partial v} = -y$$

٥-١٢ مشتقات الدوال الضمنية (Differentiation of implicit functions)

إذا أمكن من معادلة $f(x,y) = \text{constant } c$ إيجاد دالة أو أكثر $y = \phi(x)$ وحيدة القيم تحقق المعادلة فإننا نقول أن y دالة ضمنية معرفة بالمعادلة $f(x,y) = c$، لإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى x نوجد تفاضلة f ثم بالقسمة على Δx وإيجاد النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{f_x}{f_y}$$

شرط ألا ينعدم $\frac{\partial f}{\partial y}$

بالمثل إذا كانت $f(x,y,z) = c$ تعرف z كدالة ضمنية من (x,y) بحيث

$$f(x,y,z)\in C^1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\neq 0$$

فإن

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \to z_x=-\frac{f_x}{f_z}$$

وكذلك $z_y=-\frac{f_y}{f_z}$

مثال ٢١: أوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ من المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0\ ,\quad \frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

بالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y

$$\frac{2}{a^2}+\frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{2}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

بحل المعادلتين الآخرتين فى z_{xx}, z_{xy} مع إستخدام المعادلتين فى z_x, z_y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{c^2}{a^4}\frac{a^2z^2+c^2x^2}{z^3} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3}$$

مثال ٢٢: إذا كانت $u=f(x,u)$ فإن

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}$$

$$i.e. \qquad \frac{du}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{1-\frac{\partial f}{\partial u}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}\neq 1$$

١٣-٥ تبديل المتغيرات ودوال ضمنية معرفة بنظم معادلات

نفرض ان الدوال

$$\omega=\omega(u,v) \quad , \quad x=x(u,v) \quad , \quad y=y(u,v)$$

هى دوال متصلة مع مشتقاتها الجزئية. إذ أمكن التعبير عن u,v كدوال من x,y وبالتعويض فى ω فإننا نحصل على دالة $\omega = W(x,y)$ ومنها يمكن إيجاد $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}$ قد يتعذر بالإضافة إلى أنه ليس دائما من الممكن عمليا إيجاد W لذا سوف نلجأ لحساب ω_x, ω_y بطريقة غير مباشرة.

$$\frac{\partial \omega}{\partial u}=\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

المعادلتان السابقتان يمكن إعتبارهما معادلتين خطيتين فى ω_x , ω_y

بفرض أن الجاكوبيان $\partial(x, y) / \partial(u, v)$ المعرف كالآتى:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

لايساوى صفرا فإنه يمكن إستخدام طريقة كرامر لنحصل على

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Big/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\omega, y)}{\partial(u, v)} \Big/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial \omega}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial \omega}{\partial v} \end{vmatrix} \Big/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

ملحوظة: تطلق كلمة جاكوبيان أحيانا على المصفوفة بالتنظيم السابق وأحيانا أخرى على محدد هذه المصفوفة

مثال ٢٢: إذا كانت $x = r\cos\theta , y = r\sin\theta , \omega(r, \theta)$

فإن

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial \omega}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta}=\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial \omega}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial \omega}{\partial y}r\cos\theta$$

بحل المعادلتين السابقتين فى $\frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial x}$ نحصل على

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\cos\theta\ \frac{\partial \omega}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \omega}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\sin\theta\ \frac{\partial \omega}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

حالات أخرى:

الحالة الأولى: نفرض أن u, v, ω دوال من المتغير المستقل x من خلال المعادلات الضمنية

$$f(u,v,\omega,x)=0;\ g(u,v,\omega,x)=0;\ h(u,v,\omega,x)=0$$

يمكن حساب $\frac{d\omega}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dx}$ كالآتى

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,v,\omega)}\Big/\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,\omega)}$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,x,\omega)}\Big/\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,\omega)},$$

$$\frac{d\omega}{dx}=-\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,x)}\Big/\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,\omega)},$$

شرط ألا ينعدم المقام $\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,\omega)}$

مثال ٢٤: أوجد $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$ من العلاقات

$$u^2-v^2+2x=0,\ uv-y=0$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$2\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+1\right)=0 \quad , \quad v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=-u/(u^2+v^2) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=v/(u^2+v^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(u^2+v^2)-2\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]u}{(u^2+v^2)^2}$$

$$=\frac{u(u^2+v^2)-2u(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^3}=\frac{u(3v^2-u^2)}{(u^2+v^2)^3}$$

مثال ٢٥: أوجد $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ إذا كانت

$$\omega=uv \quad , \quad u^2+v+x=0 \quad , \quad v^2-u-y=0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}$$

ايضا

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+1=0 \quad , \quad -\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2v}{4uv+1} \; , \; \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{4uv+1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{-u}{4uv+1}-\frac{2v^2}{4uv+1}=-\frac{u+2v^2}{4uv+1}$$

مثال ٢٦: إذا كانت

$$u+v+\omega=x \quad u^2+v^2+\omega^2=2x-1 \; , \; u^3+v^3+\omega^3=3$$

فأوجد $\frac{du}{dx}$.

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,v,\omega)}=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2v & 3v^2 \\ 1 & 2\omega & 3\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$= -6v\omega(\omega - v) - 6(\omega^2 - v^2) = 6(\omega - v)(\omega + v - \omega v)$$

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,\omega)} = \begin{vmatrix} 1 & 2u & 3u^2 \\ 1 & 2v & 3v^2 \\ 1 & 2\omega & 3\omega^2 \end{vmatrix} = 6(u-v)(v-\omega)(\omega-u)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,v,\omega)} \Big/ \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,\omega)} = \frac{(\omega + v - \omega v)}{(u-v)(u-\omega)}$$

الحالة الثانية: نفرض ان المعادلات

$$f(u,v,\omega,x,y,z) = 0$$

$$g(u,v,\omega,x,y,z) = 0$$

$$h(u,v,\omega,x,y,z) = 0$$

تعرف u, v, ω كدوال من x, y, z من ثم

$$f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x} + f_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = -f_x$$

$$g_u \frac{\partial u}{\partial x} + g_v \frac{\partial v}{\partial x} + g_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = -g_x$$

$$h_u \frac{\partial u}{\partial x} + h_v \frac{\partial v}{\partial x} + h_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = -h_x$$

بحل هذه المعادلات نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,v,\omega)}\frac{1}{\Delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,x,\omega)}\frac{1}{\Delta},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,x)}\frac{1}{\Delta}$$

حيث $\Delta = \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,\omega)} \neq 0$

١٤-٥ معكوس تحويل (The inverse of a transformation)

أي مجموعة معادلات

$$u = f(x,y,z) \quad , \quad v = g(x,y,z) \quad , \quad \omega = h(x,y,z)$$

تسمي تحويلا حيث تنقل المعادلات الإحداثيات (x,y,z) إلى الإحداثيات (u,v, ω)، إذا أمكن حل هذه المعادلات في x,y,z فإننا نحصل على ثلاث دوال في u,v, ω تسمى معكوس التحويل الأصلي.

يمكن الحصول على مشتقات x,y,z بالنسبة إلى u,v, ω بدون معرفة التحويل العكسي بوضع

$$F(u,v,\omega,x,y,z) = u - f(x,y,z)$$

$$G(u,v,\omega,x,y,z) = v - g(x,y,z)$$

$$H(u,v,\omega,x,y,z) = \omega - h(x,y,z)$$

إذا إستأنفنا كما سبق نحصل على المشتقات المطلوبة. مثلا

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = -\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,\omega,z)} \Big/ \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$$

$$= \begin{vmatrix} f_x & g_x & h_x \\ 0 & 0 & 1 \\ f_z & g_z & h_z \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} f_x & g_x & h_x \\ f_y & g_y & h_y \\ f_z & g_z & h_z \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)} \Big/ \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)} \quad , \quad \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)} \neq 0$$

مثال ٢٧: أوجد $\frac{\partial u}{\partial x}$ بإستخدام الجاكوبيان إذا كانت

$$v = g(u,v,y) \ , \ u = f(u,v,x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

حيث

$$F = u - f(u,v,x) \ , \ G = v - g(u,v,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\begin{vmatrix} -f_x & 0 \\ -f_v & -g_v \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1-f_u & -g_u \\ -f_v & 1-g_v \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{f_x g_v}{(1-f_u)(1-g_v) - g_u f_v}$$

الجاكوبيانات (Jacobians)

سوف نعرض الآن لبعض من خواص الجاكوبيانات.

نفرض أن جاكوبيان التحويل $u = g(x,y) \ , \ v = g(x,y)$

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

وأن جاكوبيان التحويل العكسي هى

$$K = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

لحساب العلاقات بينهما نرى أن

$$1 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \ , \quad 0 = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \ , \quad 1 = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

أى أن

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

نلاحظ العلاقـة المسـاعدة لتذكر علاقة جاكوبيـان تحويـل ومعكوسـة وهـى حذف الرموز

$$\text{or} \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

$$\text{i.e.} \quad JK = 1$$

أيضا

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{g_y}{J}, \ \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{g_x}{J}, \ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{f_y}{J}, \ \frac{\partial y}{\partial v} = f_x/J$$

لدراسة إرتباط جاكوبيانات تحويل ومعكوسة فى حالة ثلاث دوال نفرض

$$u = f(x,y,z), \ v = g(x,y,z), \ \omega = h(x,y,z)$$

$$J = \frac{\partial(u,v,\omega)}{\partial(x,y,z)} \qquad K = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\omega)}$$

نكتب محدد المتممات الجبرية للمحدد

$$J = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}$$

على الهيئة

$$L = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

من العلاقات

$$1 = f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u \qquad , 0 = g_x x_u + g_y y_u + g_z z_u ,$$

$$0 = f_x x_v + f_y y_v + f_z z_v \qquad . 1 = g_x x_v + g_y y_v + g_z z_v$$

$$0 = f_x x_\omega + f_y y_\omega + f_z z_\omega \qquad , 0 = g_x x_\omega + g_y y_\omega + g_z z_\omega ,$$

$$0 = h_x x_u + h_y y_u + h_z z_u$$

$$0 = h_x x_v + h_y y_v + h_z z_v$$

$$1 = h_x x_\omega + h_y y_\omega + h_z z_\omega$$

نرى أن

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} g_y & g_z \\ h_y & h_z \end{vmatrix}}{J} = \frac{F_x}{J} , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{F_y}{J} , \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{F_z}{J}$$

بالمثل يمكن الحصـول على علاقات مشابهة للمشتقات بالنسبة إلى v, ω. من هـذه العلاقات نحصل بسهولة نحصل بسهولة على $K = L / J^3$ ولكن

$$JL = \begin{vmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{vmatrix} = J^3$$

ومن ثم $JK = 1$ (والتـي كـان مـن الممكـن إستنتاجه مباشرة مـن علاقـات الاشتقاق الأساسي).

مثال ٢٨: إذا كانت $g(u,v,x,y)=0$, $f(u,v,x,y)=0$ فإن

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \Big/ \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$$

بتفاضل العلاقتان المعطيتان بالنسبة إلى x وكذلك بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}=0,\ \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}=0,$$

نعتبر

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_u & g_x \\ f_v & g_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -f_x & -g_x \\ -f_y & -g_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$$

١٦-٥ الإرتباط الدالي (Functional dependence)

الحل العام لأنواع خاصة من المعادلات التفاضلية الجزئية يكون على الهيئة $z=f(u(x,y))+g(v(x,y))$ حيث u , v. حلان مستقلان خاصان بينما f , g دوال إختيارية من هذه التعبيرات. إذا كانت v دالة من u يكون حدى الحل الخاص دوال من u وبذا لانحصل على الحد العام. مثلا التعبير

$$z=f(x+y)+g(x^2+2xy+y^2+1)=f(u)+g(v)$$

فيه $v = u^2 + 1$ ومن ثم فأن الحدين يكونان دوال من التركيب $u = x + y$.

أيضا إذا إعتبرنا الدالتين $f = \sin(x^2 + y^2)$, $g = \cos(x^2 + y^2)$ فأنه توجد دالة F بحيث

$$0 \equiv F(f, g) = f^2 + g^2 - 1$$

وبذا ترتبط الدالتان بإرتباط ينفي كونها مستقلتان داليا مما يستوجب أن نقدم التعريف التالي.

تعريف: نقول عن دالتين f, g أنهما مرتبطتان داليا إذا أمكن التعبير عن إحداهما على هيئة دالة من الأخرى أو إذا وجدت دالة F بحيث $F(f, g) \equiv 0$

نفرض أن الدالتين $u(x,y)$, $v(x,y)$ مرتبطتان داليا، أى أنه توجد دالة F لاتساوى تطابقيا الصفر بحيث $F(u,v) = 0$

بحساب المشتقات الجزئية نحصل على

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

هاتان المعادلتان الخطيتان فى $\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$ لهما حل غير تافه فقط فى حالة إنعدام محدد المعاملات

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

أى أن الدالتين u,v تكونان مرتبطتان داليا إذا إنعدم الجاكوبيان لهما تطابقيا

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0 .$$

يمكن أيضا أن نثبت المقولة العكسية الآتية:

نظرية إذا حققت الدالتان $f(x,y)$, $g(x,y)$ الشروط الآتية في جوار نقطة (x_0, y_0)

1) $f(x,y)\ ,\ g(x,y) \in C^1$

2) $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$

3) $f_y\,(x_0, y_0) \neq 0$

من ثم توجد دالة $F(z)$ بحيث

- $g(x, y) = F(f(x, y)))$

في جوار (x_0, y_0).

الإثبات: نضع $z_0 = f(x_0, y_0)$ بحل المعادلة $f(x, y) - z = 0$ في y

$$y = \Phi(x, z)$$

في جوار للنقطة (x_0, y_0, z_0) يمكن حساب $\phi_x(x, z)$ بدلالة f

$$\phi_x(x,z) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \qquad , y = \phi(x,z)$$

بحساب مشتقة $g(x, \phi, (x,z))$ بدلالة x مستعملين العلاقة السابقة

$$\frac{\partial}{\partial x}\ g(x,\phi(x,z) = g_x - \frac{f_x g_y}{f_y}$$

$$= -\frac{1}{f_y}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$$

بتكامل هذه العلاقة نحصل على

$g(x,\phi(x,z)=F(z)$

لدالة ما z . بوضع $z=f(x,y)$ نحصل على

$\phi(x,f(x,y))=y$

$i.e.,\quad g(x,y)=F(f(x,y))$.

يمكن إبدال الشرط (3) فى النظرية السابقة بالشرط $f_x(x_0,y_0)\neq 0$، مع إستبدال حل المعادلة الضمنية في x بدلا من y.

عندما يكون عدد الدوال أقل من عدد المتغيرات يجب التحقق من إنعدام كل جاكوبيان ممكنة. مثلا فى حالة إرتباط دالتين في ثلاث متغيرات $u(x,y,z), v(x,y,z)$ داليا إى الإفتراض بأن $F(u,v)=0$ يؤدى إلى المعادلات

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\equiv 0$$

وباعتبار هذه المعادلات مثنى نحصل عليه

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\equiv 0\ ,\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\equiv 0\ ,\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\equiv 0$$

التعميم لدوال عددها m ومتغيرات عددها n لايمثل أى صعوبة. عندما تكون $m>n$ فإن الدوال تكون دائما مرتبطة داليا.

مثال ٢٩: إذا كانت $x^2+y^2+u^2-v^2=0,\ uv+xy=0$ أوجد جاكوبيان التحويل والمشتقات $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$

بأخذ تفاضلات العلاقات المعطاه

$$x\,dx+y\,dy+u\,du-v\,dv=0,\quad u\,dv+v\,dv+x\,dy+y\,dx=0$$

بحذف dv نحصل على

$$u(x\,dx+y\,dy+u\,du)+v(v\,du+x\,dy+y\,dx)=0$$

$$i.e.,\quad du=-\frac{(ux+vy)\,dx+(uy+vx)\,dy}{u^2+v^2}$$

بحذف du نحصل على

$$dv=\frac{(vx-uy)\,dx+(vy-ux)\,dy}{u^2+v^2}$$

حيث أن جميع التفاضلات هي تفاضلات تامة، من ثم يمكننا أن نطابق المعاملات كمشتقات. على سبيل المثال

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{ux+vy}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{vy-ux}{u^2+v^2}$$

جاكوبيان التحويل

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix}-(ux+vy) & -(vx+uy)\\ vx-uy & vy-ux\end{vmatrix}=\frac{x^2-y^2}{u^2+v^2}$$

مثال ٣٠: لإيضاح ما إذا كانت الدوال

$$u=\frac{x-y}{x+z},\quad v=\frac{x+z}{y+z}$$

مرتبطة داليا أم لا، نعتبر

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{z+y}{(x+z)^2} & \frac{-1}{x+z} \\ \frac{1}{y+z} & -\frac{x+z}{(y+z)^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,z)} = \begin{vmatrix} \frac{z+y}{(x+z)^2} & -\frac{x-y}{(x+z)^2} \\ \frac{1}{y+z} & \frac{y-x}{(y+z)^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x+z} & -\frac{x-y}{(x+z)^2} \\ -\frac{x+z}{(y+z)^2} & \frac{y-x}{(y+z)^2} \end{vmatrix} = 0$$

أى أن الدالتين مرتبطتان داليا.

مثال ٣١: لإثبات أن الدوال $u=y+z,\ v=x+2z^2,\ \omega=x-4yz-2y^2$

مرتبطة داليا و إيجاد العلاقة الدالية التى تربطها. نعتبر

$$\frac{\partial(u,v,\omega)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4z \\ 1 & -4z-4y & -4y \end{vmatrix} = -[-4y-4z]+[-4z-4y]=0$$

أى أن الدوال مرتبطة داليا ، يمكن إيجاد الإرتباط الدالى بين هذه الدوال كالأتى:

$$\omega = x-2(y^2+2yz) = x-2[(y+z)^2-z^2]$$

$$= x-2u^2+2z^2 = v-2u^2$$

تمارين ٣

١ – إذا كانت $y = uv$, $x + y = u$ إثبت أن $\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = u$

٢ – إذا كانت $y = v(1 + u)$, $x = u(1 + v)$ إثبت أن

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = 1 + u + v$$

٣ – إذا كانت $z = uv\omega$, $y + z = uv$, $x + y + z = u$ فإثبت أن

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, \omega)} = u^2 v$$

٤ – إذا كان $vy = x^2 + 2u^2$, $ux = v^2 + y$ تعرف u,v كدوال من x,y اثبت ان

$$u_x = (uy - 4xv) / (8uv - xy) \quad , \quad v_x = (4u^2 - 2x^2) / (8uv - xy)$$

٥ – إذا إرتبطت المتغيرات x,y,z بالعلاقات $f(x, y, z) = 0 , x^2 + y^2 + z^2 = c$ إثبت أن

$$\frac{dy}{dx} = -(zf_x - xf_z) / (zf_y - yf_z)$$

٦ – إذا كانت $x = (au + bv) / (u^2 + v^2)$, $y = \frac{bu - av}{u^2 + v^2}$ إثبت أن

$$v \frac{dx}{du} - u \frac{dx}{dv} = -y$$

٧ – إثبت أن معادلة المماس للمنحنى $f(x, y) = c$ عند نقطة (x_0 , y_0) هى

$$0 = (x - x_0) f_x (x_0 , y_0) + (y - y_0) f_y (x_0 , y_0)$$

٨ – إذا كانت

$$u = \frac{x + y}{y} \quad , \quad v = \frac{x - y}{x}$$

فإثبت أن $\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = 0$ وأوجد العلاقة بين u , v.

٩ – إثبت أن الدوال

$$u=x+y+z,\ v=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx,$$

$$\omega=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

مرتبطة داليا وأوجد العلاقة بينها.

١٠ – أوجد $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ إذا كانت $u^2+v^2-x^2=0,\ \dfrac{v}{u}-\tan y=0$

١١ – إذا كانت $z=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta\ \sin\phi$, $x=r\sin\theta\ \cos\phi$

إثبت أن

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$$

١٢ – أوجد قيمة الثابت k حتى تصبح الدوال

$$u=kx^2+4y^2+z^2,\ v=3x+2y+z,\ \omega=2yz+3zx+6xy$$

مرتبطة داليا. لقيمة k هذه أوجد العلاقة بين u, v, ω

أوجد قيمة k حتى تصبح الدوال الآتية مرتبطة داليا

$$u=\cos x\cos y-k\sin x\sin y \qquad v=\sin x\cos y+k\cos x\sin y$$

١٣ – إذا كانت $x=\cos\theta-r\sin\theta$, $y=\sin\theta+r\cos\theta$

إثبت أن

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-(\cos\theta)/r \qquad \frac{\partial r}{\partial x}=x/r$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\cos\theta}{r^3}(\cos\theta - 2r\sin\theta).$$

١٤ - إذا كانت $x = u^2 - v^2 , \; y = 2uv$ فإثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{2(u^2+v^2)} , \; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{2(u^2+v^2)}$$

١٥ - إذا كانت $f(x, y, u, v) = 0 , \; g(x, y, u, v) = 0$ فإثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

١٧-٥ المشتقات الإتجاهية (Directional derivatives)

نفرض أن $u = u(P)$ دالة موضع قياسية من موضع P معرفة فى منطقة R. نقول أن $u(P)$ متصلة عند نقطة P إذا كان $\lim_{P' \to P} u(P') = u(P)$ ، الدوال المتصلة عند كل نقط المنطقة يقال أنها متصلة فى R.

نعتبر دالة $u(P)$ متصلة فى منطقة R،نختار نقطة 0 من نقط المنطقة ونعتبرها نقطة أصل لمتجهات الموضع $r = \overrightarrow{OP}$ نفرض P' نقطة ما فى جوار النقطة P متجه موضعها $r' = r + \Delta r$،النسبة

$$\frac{u(P') - u(P)}{|\Delta r|} = \frac{u(P') - u(P)}{\Delta s}$$

تعطى معدلا تقريبيا لتغيير الدالة $u(P)$ فى إتجاه Δr . بإقتراب p' من p بحيث يظل Δr موازيا لمتجه وحدة ثابت t فإن هذه النهاية (إن كان لها وجود)

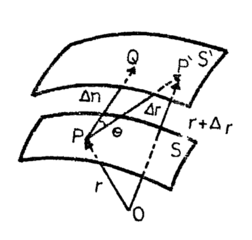
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{u(P') - u(P)}{\Delta s} = \frac{du}{ds}$$

تسمى معدل تغير u فى إتجاه t أو المشتقة الإتجاهية للدالة u فى الإتجاه المعرف بالمتجه t . إذا كانت جميع المشتقات du/ds عند نقطة P متصلة نقول أن $u(P)$ متصلة الإشتقاق (continuously differentiable) عند P .

يمكن تعريف المشتقة الإتجاهية عند نقطة P فى إتجاه متجه t بالنهاية

$$\frac{du}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{u(P + s\bar{t}) - u(P')}{s}$$

النقط التى تصبح عندها $u(P)$ مساوية مقدارا ثابتا $u(P) = c$ تسمى سطح منسوب (level surface) أو سطح مقطعى للدالة .



نعتبر سطحين S,S' معرفار بالعلاقتين $u = c,\ u = c + \Delta c$ حيث Δc هو تغيير صغير في c، لأي نقطة P على S وأي نقطة P' على S' فإن الفرق

$$\Delta u = u(P') - u(P) = \Delta c$$

وهو فرق لايتوقف على النقطة P' على S'. لكن متوسط معدل التغيير

$$\frac{u(P') - u(P)}{|\Delta r|} = \frac{\Delta u}{\Delta s}$$

يتوقف على قيمة Δr،نهاية النسبة عندما يقترب Δr من الصفر بجعل Δc يقترب من الصفر هي المشتقة الإتجاهية في الإتجاه الثابت المعرف بالمتجه $\Delta r = kt$. أكبر معدل تغير للدالة u سوف يحدث عندما يكون المقام $|\Delta r|$ في أصغر قيمة وهذا يحدث عندما تكون PP' في إتجاه العمودي n على السطح عند P .

حقيقة

$$\Delta n = \Delta r \cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين العمودي n على السطح والمتجه Δr

$$\frac{du}{dn} = \lim_{|\Delta n|\to 0} \frac{\Delta u}{|\Delta n|} = \lim_{\Delta n|\to 0} \frac{\Delta u}{|\Delta r| \cos\theta} = \sec\theta \frac{du}{ds} \rightarrow \frac{du}{ds} = \cos\theta \frac{du}{dn}$$

المشتقة du / dn في إتجاه العمودي على السطح $u = \text{const.}$ تسمى المشتقة العمودية للدالة $u(p)$.

إذا كان n هو متجه وحدة عمودي على السطح عند P مشيرا في الإتجاه الذي فيه $\Delta u > 0$ فإننا يمكن أن ننشأ متجها، يسمى متجه إنحدار u والذي يرمز به بالرمز ∇u أو grad u كالآتي

$$\mathbf{grad}\, u = \nabla u = \mathbf{n}\frac{du}{dn}$$

هذا المتجه يمثل بالإتجاه والقيمة أكبر معدل تغير للدا[illegible] شرط ألا ينعدم du / dn. من الواضح أن متجه الإنحدار لايتوقف [illegible] ى نظام للإحداثيات وبالتالى فهو لامتغير (invariant)

إذا إعتبرنا نظام الإحداثيات الكارتيزية، يمكن أن نكتب

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

حيث $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ تقترب من الصفر بإقتراب $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ من الصفر. بالقسمة على $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ وإقتراب Δs من الصفر نحصل على

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

حيث

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\widehat{x\,s}) \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\widehat{y\,s}) \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\widehat{z\,s})$$

هى جيوب تمام إتجاه متجه الوحدة t المنطبق على المتجه Δ r، من متجه الموضع للنقطة P

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

يمكن أن نكتب

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

ومن ثم

$$\frac{du}{ds} = \nabla u \cdot \mathbf{t}$$

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

الصيغة السابقة تقود إلى تعريف مؤثر إتجاهى تفاضلى ∇ يسمى مؤثر دل أو نبلا (del or napla operator)

$$\nabla\equiv\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

مثل المؤثر التفاضلى $D\equiv d/dx$ فأن المؤثر نبلا له الخواص الأتية

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$$

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$$

مثال ٥٩: لإيجاد المشتقة الإتجاهية للدالة $u=x^2y-y^2z-xyz$ عند النقطة (1,-1,0) فى إتجاه المتجه $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

$$\nabla u=(2xy-yz)\boldsymbol{i}+(x^2-2yz-xz)\boldsymbol{j}+(-y^2-xy)\boldsymbol{k}$$

$$(\nabla u)_{(1,-1,0)}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla u.\hat{t}=(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}).\frac{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}.+2\boldsymbol{k}}{\sqrt{6}}=\frac{-2-1}{\sqrt{6}}=-\sqrt{3/2}$$

مثال ٦٠: إذا كانت الدوال الآتية متصلة الإشتقاق

$$f=f(u,v,\omega)\ ,\ u=u(x,y,z)\ ,\ v=v(x,y,z)\ ,\ \omega=\omega(x,y,z)$$

فإن

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial u}\nabla u+\frac{\partial f}{\partial v}\nabla v+\frac{\partial f}{\partial \omega}\nabla\omega$$

حقيقة

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\mathbf{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)+\dots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u+\frac{\partial f}{\partial v}\nabla v+\frac{\partial f}{\partial \omega}\nabla \omega$$

١-١٧-٥ المعنى الهندسى لمتجه الإنحدار

نفرض أن لدالة الموضع $u=\phi(x,y,z)$ مشتقات جزئية أولى بالنسبة إلى x,y,z وأن $r = xi + yj+ zk$ هو متجه موضع نقطة P(x,y,z) إذا تحركت P إلى نقطة مجاورة $Q\ (x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ وكان $\Delta S=|PQ|=|\Delta \mathbf{r}|$

فأن المتجه

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

يمثل متجه وحدة فى إتجاه التغير PQ عند النقطة P . معدل تغير الدالة ϕ فى إتجاه PQ يساوى

$$\frac{d\phi}{ds}=\nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

إذا إعتبرنا سطحا $\phi\ (x,y,z) = \text{const. } c$ وكانت P نقطة على السطح فإن

$$\frac{d\phi}{ds}=0= \ gard\phi . \frac{dr}{ds}$$

حيث أن المتجه dr / ds يمثل متجه وحدة مماس للسطح $\phi\ (x,y,z) = c$ عند النقطة P من ثم فإن $\nabla\phi$ يمثل متجها عموديا على السطح عند النقطة P .

مثال ٦١: إثبت أن المستوى $lx+my+nz=p$ يمس السطح الناقصى $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ إذا كان $a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=p^2$

نكتب معادلة السطح الناقصى على الهيئة

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

نفرض أن المستوى يمس السطح الناقصى وأن نقطة التماس هي $P(x_0,y_0,z_0)$ ، من ثم

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P=\frac{2x_0}{a^2},\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P=\frac{2y_0}{b^2},\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P=\frac{2z_0}{c^2}$$

معادلة المستوى المماس

$$(x-x_0)\ \frac{2x_0}{a^2}+(y-y_0)\ \frac{2y_0}{b^2}+(z-z_0)\ \frac{2z_0}{c^2}=0\rightarrow$$

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

وهذه تمثل نفس المعادلة $lx + my + nz = p$ بالتالى

$$\frac{x_0}{a^2l}=\frac{y_0}{b^2m}=\frac{z_0}{c^2n}=\frac{1}{p}\rightarrow$$

$$x_0=\frac{a^2l}{p}\ ,\ y_0=\frac{b^2m}{p}\ ,\ z_0=\frac{c^2n}{p}$$

ولكن (x_0,y_0,z_0) تحقق معادلة السطح الناقصى، من ثم

$$a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=p^2$$

تمارين ٤

١ -اذا كانت $u=\ln(x^2+3u)$ أوجد du/dx

٢ - اذا كانت $\ln uy + u \ln u = x$ أوجد

$$\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

٣ - أوجد $\frac{\partial u}{\partial x}$ إذا كانت $x^2+u^2=f(x,u)+g(x,y,u)$

٤ - إذا كانت $u = f(x+u, yu)$ أوجد

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial x}$$

٥ - إذا كانت $x=u^2+v^2, y=u^2-v^2$ فاثبت أن

$$\frac{\partial x}{\partial u}\Big|_v \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_y = \frac{1}{2}$$

٦ - أوجد du إذا كانت $y=2u-v$ $\quad x=u+3v$

٧ - أوجد $\Delta z - dz$ إذا كانت $z=x^2y^2$

٨ - أوجد مشتقة u بالنسبة إلى x من

$$xu+uv=u-x\ ,\ v^2+xv=u+x$$

٩ - إذا كانت $(x,y)=f(u,v)=(uv, u^2+v^2)$ أوجد $\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$

عند $f(1,2)$.

١٠ - إذا كانت $(u,v,\omega)=f(x,y,z)$ معرفة ضمنيا بالعلاقات

$$xu-3xv+\omega^2=-3\ ,\ uz^2-3v\omega+vy=1\ ,\ xy\omega^2-2uv+xz^3=1$$

أوجد $\frac{\partial u}{\partial y}(0,1,-1)$

١١ - إثبت أن مجموع مقاطع المستوى المماس للسطح $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$

عند أى نقطة عليه مع محاور الإحداثيات يساوى مقدار ثابت.

١٢- أوجد نقط السطح $x^2+xy-xz+yz=16$ التى يكون العمودى

عندها موازيا المتجه $u=2i+j+4k$

١٣- أوجد معادلة المستوى المماس ومعادلتا العمودى للسطح

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$$

عند النقطة (x_0, y_0, z_0)

١٤ - هل $\frac{\partial u}{\partial x}$ تساوى مقلوب $\frac{\partial x}{\partial u}$ فى

أ) العلاقة $f(x, y, u)=0$

ب) العلاقتان $f(x, y, u, v)=0 \ , \ g(x, y, u, v) = 0$

١٥ - أوجد u, v صراحة من التحويل، $u^2+v^2=4xy \ , \ uv=2xy-2y^2$

أوجد جميع النقط $(x \ , y)=(-1, -1)$. إحسب $\frac{\partial u}{\partial x}$ عند

$(-1, -1)$ مرة من الدالة الضمنية ومرة أخرى من الدالة الصريحة.

١٦ - أوجد $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ من العلاقتان $x^2+y^2+z^2+u^2=1 \ , \ xy-zu=2$

١٧ - أوجد $\frac{du}{dx}$ إذا كانت

$$f(u, v, \omega)=x^2 , g(u, v, \omega)=ln\omega \ , h(u, v, \omega, x)=0$$

١٨ - إذا كانت $v=re^x+xe^r$ حيث $r^2=x^2+y^2$ فإثبت أن

a) $yv_x-xv_y=y(re^x+e^r)$

b) $xv_x+yv_y=v+xr(e^x+e^r)$

١٩ - إذا كانت $z=z(x, y)$ وكانت $u=x^2-y^2-2xy \ , \ v=y$

حول المعادلة $(x+y)z_x+(x-y)z_y=0$ إلى معادلة بدلالة u, v

٢٠ – إثبت أن $d\, g(f(x,y,z)) = g'\, df$

٢١ – إذا كانت $f(x,y) = xy + y \ln x$ أوجد ∇f عند $(1,2)$

أى المتجهات الآتية متجه إنحدار دالة f ، وإذا كن الأمر كذلك أوجد هذه الدالة

$$(i) \quad (zx+y)\,\mathbf{i} + (zy+x+z)\,\mathbf{j} + (y-2z)\,\mathbf{k}$$

$$(ii) \quad (3x^2y^2z)\,\mathbf{i} + x^3y\overline{z}\,\mathbf{j} + x^3y^2\,\mathbf{k}$$

٢٢ – إذا كانت $x = \phi(r,s)\ ,\ y = \psi(r,s)$ $\quad u = f(x)\ ,\ v = g(u)$ فإثبت أن

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} = f'g'\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}$$

٢٣ – إذا كانت

$$x = r\cos\theta\cos\phi\ ,\ y = r\sin\theta\cos\phi\ ,\ z = r\sin\theta$$

إثبت أن

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\cos\phi$$

أوجد كذلك جاكوبيان التحويل إلى إحداثيات إسطوانية

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta\ ,\ z = z$$

٢٤ – إذا كانت u, v, ω دوال من x, y, z فإثبت أن

$$\frac{\partial(u,v,\omega)}{\partial(x,y,z)} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial(v,\omega)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial(\omega,u)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial \omega}{\partial x}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$$

٢٥ – فى السؤال السابق إثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial(v,\omega)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial(\omega,u)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = 0$$

٢٦ - إذا كانت $u = x + y - z, v = x - y + z, \omega = z + 2y + z$

أوجد التحويل العكسي وأوجد جاكوبيان كل تحويل

٢٧ - إذا كانت

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

جاكوبيان تحويل ما. أو جاكوبيان تحويله العكسي.

٢٨ - إذا كانت $u=2xy\ ,\ v=x^2-y^2\ ,\ x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta$

إحذف x , y ثم إحسب $\partial(u,v)/\partial(r,\theta)$ وحقق الناتج بإيجاد جاكوبيان كل تحويل.

٢٩ - إذا كانت

$$u=\frac{x+y}{z}\ ,\ v=\frac{y+z}{x}\ ,\ \omega=\frac{y(x+y+z)}{xz}$$

إثبت أن $\frac{\partial(u,v,\omega)}{\partial(x,y,z)}=0$ ثم أوجد العلاقة الدالية التى تربطها ،

١٨–٥ تعميم مفكوك تايلور

سوف ندرس تعميم مفكوك تايلور لدالة أكثر من متغير وعلى وجه الخصوص لدالة متغيرين اعتمادا على مفكوك تيلور لدالة المتغير الواحد.

لتعميم مفكوك تيلور لدالة متغيرين يجب أن نحصل على المشتقات المتعاقبة للدالة.

$$F(t) = f(a+ht, b+kt)$$

$$F'(0) = h\frac{\partial}{\partial a} f(a,b) + k\frac{\partial}{\partial b} f(a,b)$$

$$F''(0) = h^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(a,b) + 2hk \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a\,\partial b} + k^2 \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2}$$

يمكن بسهولة باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضى أن نثبت أن

$$F^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{n} {}_nC_j\, h^j k^{n-j} \frac{\partial^n}{\partial a^j\, \partial b^{n-j}} f(a,b) \qquad j=0,1,2\ldots,n.$$

بسبب التشابه بين صيغة الجمع السابقة ومفكوك ذات الحدين نقدم الصيغة الرمزية التالية

$$F^n(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a,b)$$

نظرية:

اذا كانت $f(x,y) \in C^{n+1}$ فى المنطقة $|x-a| \le |h|, \quad |y-b| \le |k|$ فان

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^j f(a,b) + R_n$$

حيث

$$R_n=\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n+1} f(a+ht\,,b+kt)\,dt$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n+1} f(a+\theta h\,,b+\theta k)\quad 0<\theta<1$$

لاثبات هذه الصيغة نقوم بفك الدالة F(t) على هيئة متسلسلة تيلور

$$F(t)=\sum_{k=o}^{n}\frac{F^{(j)}(d)}{j!}(t-d)^j+\int_d^t F^{(n+1)}(u)\frac{(t-u)^n}{n!}\,du$$

بوضع $d=0\,,t=1$ نحصل على

$$F(1)=\sum_{j=o}^{n}\frac{F^{(j)}(0)}{j!}+\int_0^1 F^{(n+1)}(u)\frac{(1-u)^n}{n!}\,du$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{F^{(j)}(0)}{j!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\qquad 0<\theta<1$$

باستبدال $F^{(j)}(0)$ بصيغتها الرمزية نحصل على النتيجة المطلوبة.

يمكن أن نحصل على صيغة مفيدة أخرى بوضع x بدلا من a + h

وبوضع y بدلا من b + k

$$f(x,y)=\Sigma\frac{1}{j!}\left|(x-a)\frac{\partial}{\partial a}+(y-b)\frac{\partial}{\partial b}\right|^j f(a,b)+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left|(x-a)\frac{\partial}{\partial u}+(y-b)\frac{\partial}{\partial v}\right|^{n+1} f(u,v)$$

حيث وضعنا بعد التفاضل

$$u=a+\theta(x-a)\;,\;v=b+\theta(y-b)\;,\;0<\theta<1$$

يمكن كذلك كتابة مفكوك تيلور رمزيا (أو بصيغة مؤثرات) كالاتى:

$$f(x+h,\,y+k)=e^{hD_x+kD_y}f(x,y)$$

$$f(x,y)=e^{(x-a)D_x+(y-b)D_y}[f(x,y)]_{(a,b)}$$

حيث $D_x\equiv\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ D_y\equiv\frac{\partial}{\partial y}$

مثال ٦٢: اذا كان

$$f(x,y)\ ,\ g(x,y)\ \in C^1\ ,$$

$$f(0,0)=g(0,0)=0\ ,\ \ g_x(0,0)+g_y(0,0)\neq 0$$

فاوجد $\lim f(x,y)/g(x,y)$ عندما تقتـرب (x,y) من $(0,0)$ علـى المستقيم $y=\lambda x$.

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{f(0,0)+xf_x(\theta x,\theta y)+yf_y(\theta x,\theta y)}{f(0,0)+xg_x(\theta_1 x,\theta_1 y)+yg_y(\theta_1 x,\theta_1 y)}\quad 0<\theta,\theta_1,<1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{f_x(0,0)+\lambda f_y(0,0)}{g_x(0,0)+\lambda g_y(0,0)}$$

مثال ٦٣: سنكتب صراحة جميع حدود التعبير الرمزى

$$E=\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial a}+y\frac{\partial}{\partial b}\right]^3 f(a+t,b)$$

$$E=\left[(x-1)^3\frac{\partial^3}{\partial a^3}+3(x-1)^2 y\frac{\partial^3}{\partial a^2\partial b}+\right.$$

$$\left.+3(x-1)y^2\frac{\partial^3}{\partial a\partial b^2}+\frac{\partial^3}{\partial b^3}\right]f(a+t,b)$$

$$=(x-1)^3 f_{aaa}+3(x-1)^2 y f_{aab}+3(x-1)y^2 f_{abb}+y^3 f_{bbb}$$

تسمى دالة $F(x,y)$ متجانسة من الدرجة n فى منطقة R اذا وفقط اذا كان لاى $(x,y)\in R$ ولاى عدد موجب t

$$F(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

من امثلة للدوال المتجانسة: الدالة $f(x,y) = x$ [illegible] $y^{-4/3}\tan^{-1}\frac{y}{x}$

متجانسة من الدرجة $n = -1$

الدالة: $g(x,y) = 3 + \ln\frac{y}{x}$ متجانسة من الدرجة صفر فى الربع الأول أو الثالث

مثال ٦٤:

إثبت أنه لأى دالة متجانسة من الدرجة n متصلة المشتقات الأولى فإن

$$(i)\quad x f_x(x,y) + y f_y(x,y) = n f(x,y)$$

$$(ii)\quad x^2 f_{xx}(x,y) + 2xy f_{xy}(x,y) + y^2 f_{yy}(x,y) = n(n-1) f(x,y)$$

حقيقة

$$f(ux, uy) = u^n f(x,y)$$

بوضع $1 + t$ بدلا من u

$$f(x+tx, y+ty) = (1+t)^n f(x,y)$$

بإيجاد مفكوك تيلور فى الطرف الإيسر ومفكوك ذات الحدين فى الطرف الأيمن ومساواة معاملات قوى t المتكافئة نحصل على المطلوب، أعنى

$$f(x+tx, y+ty) = f(x,y) + t(xf_x + yf_y) +$$

$$\frac{t^2}{2!}[x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}] + \ldots$$

$$= [1 + nt + \frac{n(n-1)}{2!} t^2 + \ldots] f(x,y)$$

مثال ٦٥:

لإيجاد حتى حدود الدرجة الثانية مفكوك

$$z = \ln(3 + x^2 + 2y)$$

فى جوار (1,-1)

نحسب أولا المشتقات الجزئية

$$z(1,-1) = \ln 2$$

$$z_x = \frac{2x}{3+x^2+2y} \qquad z_x(1,-1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$z_y = \frac{2}{3+x^2+2y} \qquad z_y(1,-1) = 1$$

$$z_{xx} = \frac{6-2x^2+4y}{(3+x^2+2y)^2} \qquad z_{xx}(1,-1) = 0$$

$$z_{xy} = -\frac{4x}{(3+x^2+2y)^2} \qquad z_{xy}(1,-1) = -1$$

$$z_{yy} = -\frac{4}{(3+x^2+2y)^2} \qquad z_{yy}(1,-1) = -1$$

$$\ln(3+x^2+2y) = \ln 2 + [(x-1)+(y+1)]$$

$$+\frac{1}{2!}[-2(x-1)(y+1) - (y+1)^2] + \dots$$

تمارين ٥

١ – أكتب صراحة جميع حدود التعبيرات الرمزية

$$(a)\quad \left(1+\frac{d}{dx}\right)^3 \sin x \quad at\, x=\pi/2$$

$$(b)\quad \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 xy^2$$

٢ – أوجد جميع حدود مفكوك تيلور في جوار $(2, -1)$ للدالة $x^2 y - y^3$

٣ – أوجد مفكوك $x^2 y + \sin y + e^x$ في قوى $(x - 1), (y - \pi)$ حتى حدود الدرجة الثانية وأكتب الباقي. لاتحسب θ

٤ – عبر عن الدالة $x^2 y^2$ في قوى $(x - 1)$ ، $(y + 1)$,

٥ – أوجد حتى حدود الدرجة الثانية مفكوك $\sin(x + \log y)$ في جوار $(0,1)$

٦ – أوجد مفكوك $(1 - 3x + 2y)^3$

أ) في قوى x, y ·

ب) في قوى $(x - 1)$ ، $(y + 1)$ مع مراجعة الناتج جبريا·

٧ – إستخدم مفكوك مكلورين لإيجاد النهايات الآتية عندما تقترب (x , y) من $(0, 0)$ على المستقيم $y = ax$

$$\lim \frac{\sin xy + xe^{x-y}}{x\cos y + \sin 2y}\ ,\ \lim \frac{e^{xy}-1}{\sin x \ln(1+y)}$$

٨ – أوجد ستة حدود من مفكوك $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y+4}$ في قوى $(x + 2)$ ، $(y - 1)$

٩ – أوجد مفكوك الدوال الآتية حول النقط قرين كل من

$(i)\ \dfrac{8}{2-3x+5y} \quad (0,0) \qquad (ii)\ \cos(x^y) \quad (\pi,1)$

$(iii)\ x^{\sin y} \quad (1,0)$

٩. أوجد ستة حدود من مفكوك الدالة $\dfrac{x-y}{x+y+1}$ فى جوار $(2,-1)$

١٠. أوجد مفكوك $\dfrac{1+xy}{1-xy}$ فى جوار (i) النقطة $(0,0)$، (ii) النقطة $(2,1)$

١١. أوجد مفكوك $\ln\dfrac{x+y}{x-y}$ فى جوار $(1,0)$

١٢. أوجد مفكوك $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ فى قوى $(x-2), (y-1)$

١٣. أوجد تقريباً من الدرجة الثانية حول $(0,0)$ للدوال

$$(i)\ f(x,y) = \frac{1}{(2+x)(2-y)}, \quad (ii)\ \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy},$$

من ثم أوجد الخطأ فى هذا التقريب عند $y = 0.8$ و $X = 0.2$

١٤. أوجد تقريباً من الدرجة الثانية يصلح لحساب $f(1.1, 2.1)$ للدالة

$$f(x,y) = \frac{1+x+y}{1+x^2+y^2}$$

٥-١٩ تطبيقات التفاضل الجزئى

النهايات العظمى والصغرى المحلية (دالة متغيرين)

النهايات العظمى والصغرى المطلقة

(Absolute maximum or minimum)

تعريف:

يقال أن للدالة $f(x, y)$ نهاية عظمى مطلقة عند نقطة (X, Y) فى منطقة R إذا كان $f(X, Y) > f(x, y)$ لجميع النقط (x, y) فى R.

تعريف:

يقال أن للدالة $f(x,y)$ نهاية عظمى نسبية أو محلية عند نقطة (X, Y) من منطقة R ← يوجد عدد موجب δ بحيث $f(X,Y) > f(x,y)$ لجميع النقط (x,y) من R بحيث

$$0 < (x - X)^2 + (y - Y)^2 < \delta$$

أى إذا وجد جوار للنقطة (X,Y) تكون فيه قيمة الدالة عند (X,Y) أكبر من جميع قيمها عند نقط هذا الجوار.

تعرف النهايات الصغرى المطلقة والنسبية بتعديل واضح فى التعريفين السابقين.

سوف نستخدم مفكوك تيلور للحصول على الشروط التى بموجبها يكون لدالة $z = f(x, y)$ نهاية عظمى أو صغرى محلية $z_0 = f(a,b)$ عند نقطة (a, b).من مفكوك تايلور

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + o(h^2, k^2)$$

حيث h, k مقادير إختيارية بينما $o(h^2, k^2)$ تعنى مقدار من الدرجة الثانية فى كل من h, k

التغير Δz فى z

$$z-z_0=\Delta z=f(a+h,b+k)-f(a,b)$$

$$=hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+o(h^2,k^2)$$

نضع أولا $k=0$ ليصبح الحد السائد (من الدرجة الأولى فى التغير) فى Δz

$$\Delta z=hf_x(a,b)+o(h^2)$$

هو $hf_x(a,b)$ وهذا المقدار يغير إشارته إذا تغيرت إشارة h وعليه لكى تحتفظ Δz بإشارة ثابتة عند النهايات المحلية وجب إنعدام $f_x(a,b)$، بالمثل مع $f_y(a,b)$ ،

أى أن الشـــــرط اللازم كى تبقى إشـــارة Δz ثابتـة هو إنعدام $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ (شـرط إنعدام $f_x=0=f_y$ يكافئ كون المستوى المماس عند (a,b) عموديا على محور z)

النقـط التـى تنعـــدم عندهـا f_x, f_y تسـمى نقـط الثبـــات (Stationary points)

بإفتراض إنعدام f_x, f_y يصبح العنصر السائد فى إشارة Δz هو الحد التالى من مفكوك تيلور.

$$\Delta z=\frac{1}{2!}\{h^2 f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2 f_{yy}(a,b)\}+o(h^3,k^3)$$

الحد السائد فى هذه الحالة هو دالـة متجانسـة من الدرجة الثانيـة فى h,k. تكون لقيم كثيرة حدود من الدرجة الثانية إشارة ثابتة ثابتـة إذا كـان مميزها سالبا، أى إذا كان

$$[f_{xy}(a,b)]^2<f_{xx}(a,b)\,.\,f_{yy}(a,b)$$

(والتى تتحقق إذا كـانت كثيرة الحدود فى h , k صيغة تربيعية محددة (definite quadratic form)

لكى تكون z_0 نهاية عظمى محلية يجب أن تبقى Δz سالبة لجميع قيم (h , k)

بحيث $|h| , |k| \le \delta$ لعدد موجب δ. بالتالى يجب أن يكون أول حد

$f_{xx}(a,b)$ سالبا (تكون f_{yy} سالبة أيضا)

نوجز ما سبق فيما يلى:

الشروط الكافية لكى تكون $z_0 = f(a , b)$ نهاية عظمى محلية للدالة

$f(x , y)$ هى

$$f_x(a , b) = 0 = f_y(a , b) \ , \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \ , \ f_{xx} < 0 \ , \ f_{yy} < 0$$

أى يجب أن تكون الصيغة التربيعية لحدود الدرجة الثانية من مفكوك تيلور سالبه يقينا (negative definite)

قد يحدث أن تنعدم حدود الدرجة الثانية جميعا عند (a , b). لكى تكون (a , b) نقطة نهاية عظمى فإن المشتقات الغير منعدمة يجب أن تكون زوجية الرتب وأن تكون صيغة سالبة يقينا (negative definitie form)

الشروط الكافية لنهاية صغرى محلية عند a, b هى

$$f_x(a , b) = 0 = f_y(a , b)$$

$$[f_{xy}(a , b)]^2 < f_{xx}(a , b) f_{yy}(a , b)$$

$$f_{xx}(a , b) > 0 \quad , \quad f_{yy}(a , b) > 0$$

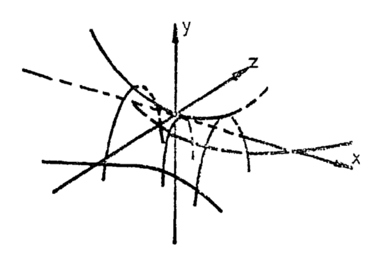
إذا كانت $u = f(x , y , z \ldots)$ فإن الشروط الكافية لكى يكون لها نهاية محلية $u_0 = f(a , b , c , \ldots..)$ هى:

أ) $\nabla f = 0 \quad , \quad i.e., \ f_x(a,b.c, \ldots)$

$= 0 \ , \ f_y(a,b,c, \ldots) = 0 \ , \ f_z(a,b,c, \ldots) = 0, \ldots etc..$

ب) حدود الدرجة الثانية من مفكوك تايلور تكون صيغة محددة (موجبة أو سالبة يقينا) فى المتغيرات $(h , k , ..)$

جـ) فى حالة النهاية الصغرى تكون حدود الدرجة الثانية من مفكوك تيلور صيغة موجبة يقينا وفى حالة النهاية العظمى سالبه يقينا.



إذا كانت $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ (أى إذا كانت الصيغة التربيعية غير محددة Indefinite) فإن Δz تكون موجبة لبعض قيم h , k وسالبة لقيم أخرى. فى هذه الحالة تسمى النقطة (a , b) نقطة بردعة (Saddle point).

مثال ٦٤: لإيجاد النهايات المحلية للسطح

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 2(x^2 - y^2)$$

$$f_x = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \quad , \quad f_y = 4y(1 - y^2)$$

$$f_x = 0 , f_y = 0 \rightarrow x = 0 , \pm 1 \quad , \quad y = 0 , \pm 1$$

$$f_{xx} = 12x^2 - 4 \; , \; f_{yy} = 4 - 12y^2 \; , \; f_{xy} = 0$$

	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$
(0,1)	−4	−8	0	32
(0, −1)	−4	−8	0	32
(1,0)	8	4	0	32
(−1,0)	8	4	0	32
(0,0)	−4	4	0	−16
(1,1)	8	−8	0	−64
(1,−1)	8	−8	0	−64
(−1,1)	8	−8	0	−64
(−1,−1)	8	−8	0	−64

أى أن للدالة نهايات صغرى عند $(\pm 1,0)$ وعظمى عند $(0, \pm 1)$ ونقط بردعة عند $(\pm 1, \pm 1)$ ، $(0,0)$

مثال ٦٥: إثبت أن للدالة $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ نهاية صغرى عند $(0,0,0)$

$$f_x=2(x-yz)\ ,\ f_y=2(y-xz)\ ,\ f_z=2(z-xy)$$

$$f_{xx}=f_{yy}=f_{zz}=2\ ,\ f_{xy}=-2z\ ,\ f_{yz}=-2x\ ,\ f_{zx}=-2y$$

عند $(0,0,0)$ تنعدم كل من f_x , f_y , f_z

نعتبر مصفوفة الصيغة التربيعية

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وهى صيغة تربيعية موجبة يقينا. أى أن $(0,0,0)$ نقطة نهاية صغرى.

٥-٢٠ نقط الثبات المشروطة (Conditional stationary points)

وجود النهايات المحلية المشروطة أو المقيدة ينشأ فقط مع دوال أكثر من متغير. إذا كانت الدالة ذات متغيرين فإنه لا يمكن أن يوجد أكثر

من قيد واحد ولكن إذا كانت الدالة ذات n من المتغيرات فإنه يمكن أن يوجد شروط عددها لا يتعدى $(n - 1)$.

لدراسة النهايات المشروطة هناك طريقتان

الطريقة المباشرة:

إذا كان عدد المتغيرات المستقلة n وكان هناك m من الشروط فإنه بشكل عام تبقى $n - m$ من المتغيرات مستقلة. إذا أمكن إستعمال الشروط لحذف m من المتغيرات المستقلة الأصلية آلت المسألة إلى الحالة التى سبق دراستها. عادة تكون عملية الحذف غير عملية.

لفرض أنه يـراد إيجاد نقط ثبات الدالة $u = f(x,y,z,\omega)$ المقيدة بالدوال

$$\phi(x,y,z,\omega)=0 \quad , \quad \psi(x,y,z,\omega)=0$$

في الطريقة المباشرة نعتبر متغيرين من الأربعة متغيران مستقلان ولنقل x,y بالإشتقاق بالنسبة إلى x,y نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

المشتقات.... $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ يمكن حذفها بإشتقاق دالتى القيود ϕ , ψ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}=0$$

من هـــذه المعـــادلات الســـت يمكـن الحصـول علـى قيـم x,y التـى ينعدم عندها $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ وبهذا نحصل على نقـط الثبـات. لتمييز هـذه النقط نحتاج لحساب مشتقات الرتب الثانية حيث قد تؤدى هذه الطريقة إلى حسابات معقـدة. طريقـة لاجرانـج (طريقـة المضروبـات الغير معينة undetermined multipliers) التى سنشرحها لاحقا قد تؤدى إلى تبسيط هـذه الحسابات والحفاظ على تماثل المتغيرات حال وجود هذا التماثل.

مثال ٦٦: إذا كانت x,y,z زوايا مثلث فإثبت أن sin x sin y sin z يكون أكبر ما يمكن إذا كان المثلث متساوى الأضلاع.

نفرض

$$u=\sin x \sin y \sin z=\sin x \sin y \sin(\pi-x-y)= \\ =\sin x \sin y \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sin y[\sin x \cos(x+y)+\cos x \sin(x+y)]=\sin y \sin(2x+y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x \sin(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\sin y \cos(2x+y) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\sin x \cos(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=\sin y \cos(2x+y)+\cos y \sin(2x+y)=\sin(2x+2y)$$

يكون المثلث متساوى الأضلاع عند $x=y=z=\pi/3$ وعندها

$$u_x=\sin\frac{\pi}{3}\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=0=u_y$$

$$u_{xx} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos(\pi) = -\sqrt{3} = u_{yy}$$

$$u_{xy} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = 3 - 3/4 > 0$$

ومن ثم فإن النهاية عظمى حيث أن $u_{xx} < 0$.

مثال ٦٧: أوجد أقصر مسافة بين النقطة (1,0) والقطع المكافئ $y^2 = 4x$

مربع المسافة بين (1,0) وأى نقطة على القطع تحقق

$$u = (x-1)^2 + y^2 \quad , \quad y^2 = 4x$$

لذا وجب دراســة أصغر قيمة للدالة u مقيدة بالشرط $y^2 = 4x$. بحذف y من u

$$u = (x-1)^2 + 4x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2(x-1) + 4 \Rightarrow x = -1$$

لاتوجد نقطة على القطع $y^2 = 4x$ فيها $x = -1$ مما يعنى عدم وجود نهاية محلية. أصغر مسافة مطلقة من النقطة للقطع هى المسافة بين النقطة (1,0) ونقطة الأصل حيث لا ينعدم $\frac{du}{dx}$

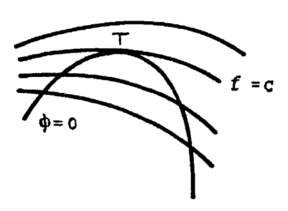
٢١-٥ طريقة لاجرانج للنهايات العظمى والصغرى المشروطة

إذا أردنا إيجاد النهايات العظمى والصغرى المحلية لدالة $f(x,y,z)$ حيث المتغيرات x,y,z مرتبطة بالعلاقة $\phi(x,y,z) = 0$ كأن ندرس أكبر أو أصغر درجة حرارة f على سطح $\phi = 0$ فإن المتغيرات x, y, z لم تعد بعد مستقلة. مثل هذه النهايات ليست أمرا جديدا, كل ما نحتاجة لمعالجة مثل هذه الحالة هو التعبير عن أحد المتغيرات ونيكن z بدلالة المتغيرات

الأخرى. ولكن قد يكون من المناسب أن نعبر عن شروط النقط الثابتة بصورة أكثر تماثلا دون إعطاء أفضلية لأحد المتغيرات.

كمثال بسيط ولكنه تقليدى البحث عن النهايات المحلية لدالة $f(x,y)$ والتى فيها المتغيرات x,y غير مستقلة ولكنها مرتبطة بالشرط $\phi (x,y) = 0$.

سنمهد هندسيا للمعالجة التحليلية. سوف نفرض أن القيد يمثل منحنى فى مستوى xy بدون نقط شاذة وأن عائلة المنحنيات $f(x,y)=c$ تغطى جزءا من المستوى. مسألتنا هى إيجاد المنحنى من العائلة $f(x,y) = c$ الذى يقطع المنحنى $\phi = 0$ وتكون قيمة c فيه أكبر أو أصغر ما يمكن. عندما نتحرك على المنحنى $\phi = 0$ تتغير قيمة c بإنتظام ونتوقع أن نصل لنقطة حرجة.



يحدث هذا عندما يمس منحنى من العائلة $f=c$ المنحنى $\phi = 0$ عند نقطة التماس T يكون للمنحنيين نفس المماس ومن ثم $f_x : f_y = \phi_x : \phi_y$ بإعتبار ثابت التناسب يساوى λ فإن

$$f_x+\lambda\phi_x=0 \quad , \quad f_y+\lambda\phi_y=0$$

هاتان المعادلتان بالإضافة إلى المعادلة $\phi (x,y) = 0$ يقدمان إحداثيات نقطة التماس بالإضافة إلى ثابت التناسب.

قد تفشل المناقشة السابقة إذا كانت النقطة T نقطة شاذة للمنحنى $\phi = 0$. على كل قد حصلنا على قاعدة تقبل التعميم وهى:

لكى يكون لدالة $f(x, y)$ نقطة حرجة (extreme value) (u,v) مع وجود القيد $\phi(x,y) = 0$ يجب وجود ثابت λ بحيث

$$f_x(u, v) + \lambda\phi_x(u, v) = 0 \quad and \quad f_y(u, v) + \lambda\phi_y(u, v) = 0$$

بالإضافة إلى $\phi(u,v) = 0$

تسمى القاعدة السابقة طريقة لاجرانج للمضروبات غير المعينة

(Lagrange's method of undetermined multipliers)

ويسمى العامل λ مضروب لاجرانج (Lagrange's Multiblier).

تتميز طريقة معاملات لاجرانج بأنها تتعامل مع جميع المتغيرات على قدم المساواة (دون النظر لأى منها يمكن حذفه) وبالتالى فهى تحافظ على إى تماثل فى المتغيرات.

سوف نعطى الآن معالجة تحليلية لهذا النوع من المسائل بمسألة إيجاد النهاية الصغرى أو العظمى لدالة $u = f(x, y, z)$ مقيدة بالقيود

$$g(x,y,z) = 0 \quad , \quad h(x,y,z) = 0$$

حيث الدالتان g, h مستقلتان خطيا.

يكون للدالة f نقطة ثبات $P(x_0, y_0, z_0)$ إذا إنعدمت حدود الدرجة الأولى من مفكوك تيلور للمقدار Δf عند P أى إذا كان

$$f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = 0 \ at\ P \qquad (1)$$

التغيرات dx, dy, dz ليست مستقلة وبذا لا نستطيع أن نستنتج إنعدام f_x, f_y, f_z لدينا أيضا

$$g_x\,dx + g_y\,dy + g_z\,dz = 0 \ at\ P \qquad (2)$$

$$h_x\,dx + h_y\,dy + h_z\,dz = 0 \ at\ P \qquad (3)$$

بضرب المعادلتين (3) ,(2) فى ثوابت λ_1, λ_2 بالترتيب وإضافتهما للمعادلة (1) نحصل على

$$(f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x)\,dx + (f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y)\,dy +$$

$$(f_z+\lambda_1 g_z+\lambda_2 h_z)\, dz=0$$

عند النقطة P يمكن إختيار λ_1 ، λ_2 بحيث ينعدم معاملين لتغيرين من التغيرات dx, dy, dz لأنه إن لم يكن هذا صحيحا فإن

$$\begin{vmatrix} g_x & h_x \\ g_y & f_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_y & h_y \\ g_z & h_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_z & h_z \\ g_x & h_x \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالى فإن g,h تكونان غير مستقلتين داليا. إذا عينا λ_1 ، λ_2 محققتين لشروط إنعدام تغيرين فإن التغير الثالث يمكن أخذه إختياريا ولذا وجب إنعدام معاملة. وبالتالى نحصل على المعادلات

$$f_x+\lambda_1 g_x+\lambda_2 h_x=0$$

$$f_y+\lambda_1 g_y+\lambda_2 h_y=0 \quad at\ P \qquad (4)$$

$$f_z+\lambda_1 g_z+\lambda_2 h_z=0$$

هذه المعادلات مع معادلتى القيود $g=0\,,h=0$ تعطى المعادلات اللازمة لإيجاد $x_0\,,y_0\,,z_0\,,\lambda_1\,,\lambda_2$ المعادلات (4) يمكن تذكرها بسهولة لأنها تنتج من تفاضلات الدالة المساعدة

$$\phi=f+\lambda_1 g+\lambda_2 h$$

والتى يمكن إعتبار دراستها دراسة نهاية محلية للدالة ϕ غير المقيدة.

مثال ٦٨: أوجد أكبر قيمة للدالة $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ على السطح

$$a^2= x^2+y^2+z^2$$

الحل: حسب قاعدة لاجرانج نعتبر الدالة

$$u=x^2y^2z^2+\lambda\,(x^2+y^2+z^2-a^2)$$

بالتفاضل نحصل على

$$2xy^2z^2+2\lambda x=0\ ,\ 2x^2yz^2+2\lambda y=0 \quad 2x^2y^2z+2\lambda z=0$$

الحــــل (0,0,0) يعطـــــى أصــغر قيمة للدالة وهى صفر. بينما الحلول $x^2=y^2=z^2$, $\lambda=-x^4$ تؤدى بإستخدام القيد إلى القيم

$$x=\pm a/\sqrt{3}\ ,\ y=\pm a/\sqrt{3}\ ,\ z=\pm a/\sqrt{3}\ ,$$

وجميعها تعطى قيمة للدالة f تساوى $a^6/27$ وهى أكبر قيمة للدالة، ومن ثم يمكن أن نكتب

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le\frac{a^2}{3}=\frac{x^2+y^2+z^2}{3}.$$

أى أن الوسط الهندسى لأى ثلاث أعداد موجبة x^2, y^2, z^2 لايتعدى وسطها الحسابى

مثال ٦٩: إثبت أن $xy\le\frac{1}{a}x^a+\frac{1}{b}y^b$ لجميع قيم $x\ge0, y\ge0$ وجميع قيم $a>0, b>0$ بحيث $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

الحل: تتحقق المتباينة إذا إنعدمت أى من x , y ومن ثم سنعتبر الحـــالة $xy\ne0$ حيث أن تحقق المتباينة لأى عددين x , y يستوجب تحققها للعددين $xt^{1/a}, yt^{1/b}$ لأى عدد موجب t لأن

$$xy\le\frac{1}{a}x^a+\frac{1}{b}y^b\rightarrow xyt\le\frac{1}{a}x^at+\frac{1}{b}y^bt$$

$$i.e.\qquad xy\,t^{1/a+1/b}\le\frac{1}{a}\,(xt^{1/a})^a+\frac{1}{b}\,(yt^{1/b})^b$$

من ثم يمكن أن نكتفى بدراسة الحالة التى فيها $xy=1$ وعليه يجب إثبات أن $\frac{1}{a}x^a+\frac{1}{b}y^b\ge1$ بحيث $xy=1$. بالتالى سندرس أصغر قيمة للدالة $f=\frac{1}{a}x^a+\frac{1}{b}y^b$ المقيدة بالشرط $xy=1$، نعتبر الدالة

$$u=\frac{1}{a}x^a+\frac{1}{b}y^b+\lambda\,(1-xy)$$

$$u_x = x^{a-1} - \lambda y \quad , \quad u_y = y^{b-1} - \lambda x$$

عند النهايات العظمى أو الصغرى تنعدم كل من u_x , u_y وهذا يؤدى بإستثناء الحالة $x = y = 0$ إلى

$$x^a = \lambda \, , \, y^b = \lambda \rightarrow x = y = 1$$

ومن ثم فإن أصغر قيمة للدالة $\frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$ يساوى $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

$$i.e. \qquad \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b \geq 1$$

مثال ٧٠: أوجد نقط $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ والتى عندها تكون الدالة $x\,y\,z$ في حالة ثبات.

الحل: نفرض $f = xyz \; , \; \phi = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ نعتبر الدالة المساعدة

$$g = f + \lambda \phi = xyz + \lambda \, (x^2 + y^2 + z^2 - 1) \, .$$

نقط ثبات f تتحدد بالمعادلات

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; , \; g_x = yz + 2\lambda x = 0 \, ,$$

$$g_y = zx + 2\lambda y = 0 \, , \, g_z = xy + 2\lambda z = 0$$

$$xg_x + yg_y + zg_z = 3xyz + 2\lambda \, (x^2 + y^2 + z^2) = 3xyz + 2\lambda = 0$$

أى أن قيم الثبات هى $f = -\frac{2}{3}\lambda$

بحل المعادلات $g_x = g_y = g_z = 0$ نحصل على

$$g_x = yz \, (1 - 3x^2) = 0 \; , \; g_y = zx \, (1 - 3y^2) = 0 \; , \; g_z = xy \, (1 - 3z^2) = 0$$

ومنها نحصل على نقط الثبات الثمانية

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

بالإضافة إلى ست نقط ثبات نحصل عليها من إنعدام متغيرين من المتغيرات الثلاث x, y, z

$$(\pm 1,0,0) \quad , \quad (0,\pm 1,0) \quad , \quad (0,0,\pm 1)$$

لتعيين طبيعة نقط الثبات نختار نقطتين

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right) , (1,0,0)$$

ونوجد حدود الدرجة الثانية من مفكوك تايلور للتغير فى الدالة Δg

$$\Delta g=g(x+h_1,y+h_2,z+h_3)-g(x,y,z)$$

$$=\frac{1}{2}\left[g_{xx}h_1^2+g_{yy}h_2^2+g_{zz}h_3^2+2\left(g_{xy}h_1h_2+g_{yz}h_2h_3+g_{zx}h_3h_1\right)\right]+$$

$$+\text{higher powers of } h_1,h_2,h_3$$

يجب أن نختبر إشارة Δg فى جوار صغير لنقط الثبات حيث h_1, h_2, h_3 مرتبطة بالعلاقة

$$d\phi=\phi_x h_1+\phi_y h_2+\phi_z h_3=0 \rightarrow xh_1+yh_2+zh_3=0$$

أيضا

$$g_{xx}=2\lambda=g_{yy}=g_{zz},$$

$$g_{xy}=z , g_{yz}=x , g_{zx}=y$$

قيمة $\lambda=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ عند $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\Delta g = \frac{1}{\sqrt{3}}(h_1^2+h_2^2+h_3^2) + \frac{2}{\sqrt{3}}(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1) + \ldots$$

ولكن

$$2(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1) = (h_1+h_2+h_3)^2 - (h_1^2+h_2^2+h_3^2)$$

$$= -(h_1^2+h_2^2+h_3^2)$$

i.e. $\Delta g = -\frac{2}{\sqrt{3}}(h_1^2+h_2^2+h_3^2) + \ldots < 0$

أى أن نقطة الثبات $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ نقطة نهاية عظمى محنية.

بالنسبة للنقطة $(1, 0, 0)$

$$\Delta g = 2[h_2 h_3] + \ldots$$

من الواضح أن إشارة Δg تتغير حسب إشارتى h_2, h_3 ومن ثم فإن $(1, 0, 0)$ هى نقطة بردعة.

مثال ٧١: أوجد مساحة مقطع السطح الناقصى

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a > b > c > 0$$

بالمستوى Π $\quad lx+my+nz=0$

مقطع المستوى بالسطح الناقصى هو قطع ناقص. مساحة القطع الناقص $= \pi pq$ حيث p, q أنصاف أطوال محاوره. حيث أن مركز القطع هو نقطة الأصل وأن p,q هما أكبر وأصغر قيم للمقدار

$$u = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (1)$$

مقيدين بالعلاقتين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2) \quad , \quad lx+my+nz=0 \qquad (3)$$

ومن ثم تكون الدالة المساعدة

$$f=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+2\mu\,(lx+my+nz)$$

عند نقطة الثبات $df=0$

$$2x+2\frac{x}{a^2}\lambda+2\mu l=0 \qquad (4)$$

$$2y+\frac{2y}{b^2}\lambda+2\mu m=0 \qquad (5)$$

$$2z+\frac{2z}{c^2}\lambda+2\mu n=0 \qquad (6)$$

بحساب $x\,(4)+y\,(5)+z\,(6)$ مع إستعمال (3) ,(2) ,(1) نجد أن

$$x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+\mu\,(lx+my+nz)=0$$

$$i.e. \qquad r^2+\lambda=0$$

أيضا من (6) , (5) , (4)

$$\frac{x}{l(1+\lambda/a^2)}=\frac{y}{m(1+\lambda/b^2)}=\frac{z}{n(1+\lambda/c^2)}=-\mu$$

بالتعويض فى (3) نحصل على

$$\frac{l^2}{1+\lambda/a^2}+\frac{m^2}{1+\lambda/b^2}+\frac{n^2}{1+\lambda/c^2}=0$$

$$l^2\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)+m^2\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)+$$

$$+n^2\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)=0$$

$$\lambda^2\left[\frac{l^2}{b^2c^2}+\frac{m^2}{a^2c^2}+\frac{n^2}{a^2b^2}\right]+\ldots+(l^2+m^2+n^2)=0$$

وجـور هذه المعادلة هي p^2, q^2

$$p^2 q^2=\frac{l^2+m^2+n^2}{\frac{l^2}{b^2c^2}+\frac{m^2}{a^2c^2}+\frac{n^2}{a^2b^2}}=a^2b^2c^2\,\frac{l^2+m^2+n^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$$

مساحة القطع الناقص

$$\pi\, pq=\pi\, abc\sqrt{\frac{l^2+m^2+n^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$$

يمكن تعميم طريقة المضروبات غير المعينة على دوال ذات متغيرات أكثـر مع قيـود أكثر. فمثلا لإيجـاد نقـط ثبـات الدالـة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المقيـدة بالعلاقات

$$\phi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\ ,\ \phi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ldots$$

$$,\ldots\ \phi_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$$

نساوى المشتقات الجزئية للدالة $F=f+\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2+\ldots+\lambda_m\phi_m$

بالنسبة إلى $x_1,x_2,\ldots,x_n$ بالصفر حيث $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ثوابت، المعادلات الناتجة مع معادلات القيود وعددها $m+n$ تعين قيم

$x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$.

تمارين ٦

١ – أوجد نقط الثبات للدوال الآتية مع تحديد طبيعتها

i) $x^4+y^4-6(x^2+y^2)+8xy$

ii) $3y(x-1)^2+18y^2(2y-3)+x^3-3x$

iii) $x^4+64y^4-2(x+8y)^2$

iv) $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$

v) $x(3-x^2-y^2)$

vi) $x^2y^2-(x^2+y^2)$

vii) $\frac{2}{xy}-x^2-y^2 \quad xy\neq 0$

viii) x^3+y^3-3xy

ix) $x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

x) $x^4+y^3+32x-9y$

(xi) $4x^2+10xy+4y^2-x^2y^2$

(xii) $x^4+a^4y^4-b^2(x+ay)^2$

(xiii) $\frac{xy}{ba^3}+\frac{1}{x}-\frac{b}{y}$

٢ – إثبت أن للدوال الآتية نقط ثبات قرين كل منها، ميز نوعها

i) $x^3+y^3-2(x^2+y^2)+3xy$ $\quad (0,0)\ ,\ (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

ii) $(x+2y+2)/(x^2+y^2+1)$ $\quad (\frac{1}{5},\frac{2}{5})\ ,\ (-1,-2)$

٣ – إثبت أن الدالة $(x^2+y^2+1)/(x+y+1)^2$ نهاية صغرى عند $(1,1)$ والدالة $(x^{1/2}+y^{1/2}+1)/(x+y+1)^{1/2}$ نهاية عظمى عند $(1,1)$

٤ – إثبت أن للدالة $(x+y)/(x^2+2y^2+6)$ نهاية عظمى عند $(2,1)$
ونهاية صغرى عند $(-2,-1)$

٥ – أوجد النهايات المحلية للسطح $\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ في المربع

$.'2 \quad , \quad -\pi/2\le y\le\pi/2$

وكذلك السطح $\sin^2 x\cos y+\sin^2 y\cos x$ حيث $0\le x,y<\pi$

٦ – أوجد نقط ثبات السطح $(x+y)^3+(x-y)^2-12(x+y)$ وميزها.

٧ – إختبر الدالة $(x-2)^n+(x+1)^n+(y-3)^n+(y+1)^n$ من حيث النهايات العظمى والصغرى ونقطة البردعة حيث n عدد صحيح موجب.

٨ – أوجد نقط ثبات السطح $z=x^2+y^2\cos x$ وحدد طبيعتها.

٩ – إثبت أنه ليس للدالة $x^7+(x-y)^7$ نهايات عظمى أو صغرى محلية.

١٠ – أوجد جميع المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة

$u=(a^2x^2+b^2y^2)\,e^{ax+by}$

إرسم بالتقريب المنحنيين

$|^2x^2+b^2y^2+2ax=0\ ,\ a^2x^2+b^2y^2+2by=0$

وضح أن المعادلتين تتحققان بقيمتين حقيقيتين فقط. من ثم وضح أن للدالة u نقطتي ثبات فقط. ميز أنواعها.

١١ – أوجد النهاية العظمى للدالة $v=xyz$ بحيث $x+y+2z=3a$ (حيث a ثابت).

١٢ – أوجد النهاية العظمى للدالة x^2+y^2 مقيدة بالشرط $x^2+2xy+3y^2=1$

١٣ – إثبت أنه إذا كانت x,y,z تحقق العلاقة $a^3x+b^3y+c^3z=1$ فإن قيمـــة الدالة $x^4+y^4+z^4$ عند نقطـــة ثباتها الوحيدة هي $(a^4+b^4+c^4)^{-3}$. إثبت أنها نهاية صغرى.

١٤ - إذا كانت $xyz\omega = 2$ فأوجد أصغر قيمة للمقدار

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}+\frac{\omega^2}{16}$$

١٥ – أوجد النقطة على القطع $y^2 = 2x, z = 0$ الأقرب ما يمكن للمستوى

$$z = x + 2y + 8$$

١٦ – أوجد أكبر وأصغر مسافة من النقطة (0,0,0) إلى السطح الناقصى

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad a<b<c$$

١٧ – أوجد نقط السطح $z^2 - xy = 1$ الأقرب ما يمكن لنقطة الأصل.

١٨ – إذا كانت x, y, z موجبة أوجد النهاية العظمى للدالة $x^m y^n z^p$ حيث m, n, p جميعها موجبة وحيث $x + y + z = a$

١٩ – أوجد النهايات المحلية للدالة xyz المقيدة بأن قيم x, y, z موجبة وبحيث

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$$

٢٠ - أثبت أن للدالة $Z = 2x + 4y - kx^2y^4$, $k \neq 0$ نقطة بردعة وأنه ليس لها نهايات محلية عظمى أو صغرى.

٢١ - إذا كانت x, y, z موجبة بحيث $x+y+z = 1$ أثبت أن

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) \geq 8$$

٢٢ - أختبر من حيث النهايات العظمى والصغرى المحلية المشروطة

(i) $u = x^3 + y^3 + z^3, \qquad x + y + z = 6$

(ii) $u = x + y + z \quad , \qquad \frac{4}{x}+\frac{9}{y}+\frac{16}{z} = 1$

(iii) $u = xyz \quad , \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad 3$

٣- أوجد النهايات العظمى والصغرى المطلقة حال تواجدها للدوال

i. $z = xy, \qquad x^2 + y^2 \le 1$

ii. $z = x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

٤- احسب أصغر مسافة من النقطة $(2,0,-1)$ إلى السطح $y^2 = x+z$

٢٢-٥ التفاضل تحت علامة التكامل

إذا إعتمد موضوع تكامل على بارامتر أو أكثر بالإضافة إلى متغير التكامل فإن نتيجة التكامل تعتمد على هذه البارامترات. سنعرض لثلاث حالات فيها موضوع التكامل دالة متصلة فى كل من متغير التكامل والبارامتر ومشتقته الأولى بالنسبة إلى البارامتر أيضا متصلة.

والحالات الثلاثة هى:

أ - أن يكون التكامل غير محدد

ب - أن يكون التكامل محددا وله نهايات ثابتة

جـ - أن يكون التكامل محددا ونهاياته تعتمد على البارامترات

أ - التكامل غير محدد

نفرض

$$I(x,\alpha)=\int f(x,\alpha)\,dx$$

$$\Delta I=I(x,\alpha+\Delta\alpha)-I(x,\alpha)=\int [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int f_{\alpha}(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)\,dx \qquad 0<\theta<1$$

حيث أن موضوع التكامل دالة متصلة فى المتغير α من ثم

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int f_{\alpha}(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)\,dx=\int f_{\alpha}(x,\alpha)\,dx$$

$$\text{i.e.}\quad \frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx$$

ب – التكامل محدد وله نهايات ثابتة

بنفس الخطوات السابقة يمكن أن نثبت أنه إذا كان

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

حيث a, b مقادير ثابتة لا تعتمد على α فإن

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)\, dx$$

جـ – التكامل محدد ونهاياته تعتمد على البارامتر

نعتبر

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

حيث a, b دوال من α ،نفرض أن

$$\int f(x, \alpha)\, dx = F(x, \alpha) + c$$

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = [F(x, \alpha)]_a^b = F(b, \alpha) - F(a, \alpha)$$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial b} \frac{db}{d\alpha} + \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial a} \frac{da}{d\alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial \alpha}$$

ولكن $\frac{\partial}{\partial t} F(t, \alpha) = f(t, \alpha)$ من ثم

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial \alpha} + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right] + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}$$

$$i.e., \quad \frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha)\, dx + f(b,\alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a,\alpha) \frac{da}{d\alpha}$$

مثال ٧٢: لإيجاد

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad \int \frac{-2a\, dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{-x}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2} \tan^{-1} \frac{x}{a} + B$$

نبدأ أولا بالتكامل

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + A$$

بالتفاضل تحت علامة التكامل [حالة (أ)] بالنسبة الى a نحصل على

$$-\int \frac{2adx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \left(\frac{-x}{a^2}\right) - \frac{1}{a^2} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$i.e. \quad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

مثال ٧٣: لإيجاد مشتقة $\int_{x^2}^{-\sin x} e^{xt} dt$ بالنسبة إلى x

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{-\sin x} e^{xt}\, dt = \int_{x^2}^{-\sin x} t e^{xt}\, dt - e^{-x\sin x} \cos x - 2x\, e^{x^3}$$

مثال ٧٤: لإيجاد $I(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\, dx$ ، نشتق بالنسبة إلى a

$$I'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x})\, dx$$

$$dx = \frac{-1}{a+1} [e^{-(a+1))x}]_0^\infty = \frac{da}{a+1} \rightarrow I(a) = \ln(a+1) + c$$

$$I(0) = 0 = c \rightarrow I(a) = \ln(a+1)$$

مثال ٧٥: لإيجاد

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$$

حيث $0 < a < b$ نفرض

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^\infty -e^{-at}\,dt = -\frac{1}{a},\ \frac{\partial I}{\partial b} = \frac{1}{b}$$

$$I = \int -\frac{1}{a}\,da = -\ln a + C(b) \qquad \frac{\partial I}{\partial b} = C'(b) = \frac{1}{b} \to C = \ln b$$

$$I(a,b) = \ln b - \ln a = \ln b/a$$

مثال ٧٦ : لإثبات أن

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = [f(\infty) - f(0)]\ln\frac{a}{b}$$

حيث $f(x)$ متصلة ومنتهية هى ومشتقتها الأولى فى المنطقة

$0 \le x \le \infty$

نعتبر

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx \to \frac{\partial I}{\partial a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty f'(ax)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\,[f(\infty) - f(0)]$$

$$\to I(a,b) = [f(\infty) - f(0)]\log a + C(b)$$

بالمثل

$$\frac{\partial I}{\partial b} = c'(b) = -\frac{1}{b}\,[f(\infty) - f(0)]$$

$$\to c(b) = -[f(\infty) - f(0)]\ln b$$

$$\to I(a,b) = [f(\infty) - f(0)]\ln\frac{a}{b} + D$$

يمكن إثبات أن $D = 0$ وذلك بوضع $a = b$

تمارين ٧

١ - إثبت أن

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \quad \alpha>1$$

ثم بالتفاضل تحت علامة التكامل إثبت أن

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a-\cos x)^2}=\frac{a\pi}{(a^2-1)^{3/2}}$$

٢ - من العلاقة

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\cos xt\, dt=\frac{1}{x^2+1}$$

أوجد $\int_0^{\infty} te^{-t}\sin xt\, dt$

٣ - من التكامل

$$\int_0^1 x^y\, dx=\frac{1}{y+1}$$

إثبت أن

$$\int_0^1 x^y \ln x\, dx=-\frac{1}{(y+1)^2}$$

٤ - إثبت أن $\int_0^{\pi} \sin ax\, dx=\frac{1-\cos \pi a}{a}$

ثم إستنتج أن

$$(i) \quad \int_0^{\pi} x\cos ax\, dx=[\pi a\sin(\pi a)+\cos(\pi a)-1]/a^2$$

$$(ii) \quad \int_0^{\pi} x^2\sin x\, dx=\pi^2-4$$

أوجد $(iii) \quad \frac{d}{dt}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos(xt)}{x}dx,\ \frac{d}{dt}\int_{\sin t}^{\cos t}\ln(x+t)dx$

٥ – إثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

ثم إستنتج أن

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2 a^{2n+1}}$$

٦ – إحسب

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+a\cos x}dx\ ,\quad a^2<1$$

وعندئذ إستنتج أن

$$\int_0^\pi \ln(1+a\cos x)\,dx = \pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\right)$$

٧ – إحسب

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{A+B\cos 2\theta}$$

حيث $A>B\geq 0$ بالتفاضل بالنسبة إلى A أوجد

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2} \qquad ab\neq 0$$

٨ – إثبت أن

$$\int_0^1 x^a\,dx = \frac{1}{a+1} \qquad a\neq -1$$

ثم استنتج أن

$$\int_0^1 \frac{x^a-1}{\ln x}\,dx=\ln(a+1)$$

٩ - إذا كانت $y=\int_0^x f(a)\sin k(x-a)\,da$ حيث k عدد ثابت

فإثبت أن y تحقق المعادلة $y''+k^2y=f(x)$ ومن ثم أوجد

$$\frac{1}{k}\int_0^x e^{-a}\sin k(x-a)\,da$$

١٠ - إذا كان

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ ,\ a>0$$

وكان

$$y(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(x^2+1)}\,dx$$

إثبت أن $y''-y+\frac{\pi}{2}=0$

١١ - إذا كان $f(y)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\,dx$

إثبت أن $f'(y)+2yf(y)=0$ وأن $f(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$

١٢ - إذا كانت $f(x)=\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\theta)\,d\theta$ فإثبت أن f تحقق المعادلة

$$x\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{df}{dx}+xf=0$$

١٣ - إذا كانت $I=\int_0^\infty e^{-u^2t}\cos(au)\,du$

فإثبت أن

$$\frac{\partial I}{\partial a}=-\frac{a}{2t}I$$

ثم إستنتج أن

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-x^2/4t}$$

مع العلم بأن

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

١٤- أستخدم التفاضل تحت علامة التكامل لإيجاد

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} e^{xt}}{t}dt$$

١٥ - إستخدم التفاضل تحت علامة التكامل لإثبات أن

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}ax}{x(x^2+1)}\,dx=\frac{1}{2}\pi\,ln\,(1+a) \qquad a>0$$

١٦ - إستخدم التفاضل تحت علامة التكامل لإيجاد

$$\int_0^{1/\sqrt{x}} \ln(1+xt^2)\,dt \qquad x>0$$

١٧ - إذا كانت $-1<a<1$ فإثبت أن

$$\int_0^{\pi/2} ln\,(1+\cos x\cos a\pi)\sec x\,dx=\frac{1}{2}\pi^2\left(\frac{1}{4}-a^2\right)$$

١٨ - بإستخدام التفاضل تحت علامة التكامل أوجد

$$(i)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad x>0 \quad \left(Hint \int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$(ii)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin bx}{x}\,dx$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$$

١٩ - إذا كان

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

إثبت أن

$$(i)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\,\frac{\cos bx-\cos cx}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$$

$$(ii)\quad \int_0^\infty \frac{\cos bx-\cos cx}{x}\,dx=\ln\frac{c}{b}$$

$$(iii)\quad \int_0^\infty \frac{\sin bx-\sin cx}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b+c}{b-c}\qquad b>c>0$$

$$(iv)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-dx}}{x}\sin bx\,dx=\tan^{-1}\frac{d}{b}-\tan^{-1}\frac{a}{b}$$

٢٠ - إثبت أن

$$(i)\quad \int_0^\infty \frac{f(ax^n)-f(bx^n)}{x}\,dx=\frac{1}{n}[f(\infty)-f(0)]\ln\frac{a}{b}$$

$$(ii)\quad \int_0^\infty \frac{f(\ln x^a)-f(\ln x^b)}{\ln x}\,dx=[f(\ln\infty)-f(\ln 1)]\ln\frac{a}{b}$$

$$(iii)\quad \int_1^\infty [f(x^a)-f(x^b)]\,\frac{dx}{x\ln x}=[f(\ln\infty)-f(\ln 1)]\ln\frac{a}{b}$$

٢١ - إثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{b}\ln(1+ab)\qquad a>0,\ b>0$$

$$\int_0^1 \frac{\sin(p\ln x)}{\ln x}\,dx=\tan^{-1}p\ ,\quad \int_0^\infty \left(e^{-a^2/x^2}-e^{-b^2/x^2}\right)dx=\sqrt{\pi}\,(b-a)$$

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b} \;,\quad \int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\, dx = \ln \frac{p+1}{q+1}$$

٢٢ - إثبت أن

$$\int_0^\infty \ln \frac{a+b\,e^{-cx}}{a+b\,e^{-dx}} \frac{dx}{x} = \ln [a - \ln(a+b)] \ln \frac{c}{d}$$

$$\int_0^a \ln(1+\tan a \tan x)\, dx = a \ln \sec a$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2} \qquad |a| \le 1$$

٢٣ - أوجد قيمة

$$\int_0^{x^{-1/2}} \ln(1+xt^2)\, dt = x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2\right) \quad x > 0$$

$$\int_0^1 \frac{1+ax}{1-ax} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

٢٤ - أثبت أن

$$\int_0^\pi \ln \frac{1+x\cos\theta}{1-x\cos\theta} \frac{d\theta}{\cos\theta} = 2\pi \sin^{-1} x \qquad |x| < 1$$

٢٥ - باستخدام التفاضل تحت علامة التكامل أوجد

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x}\, dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x}\, dx, \; a, b > 0$$

٢٦ - أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث

$$\int_{x^2}^{4y} e^{-xt^2}\, dt = \text{constant } c$$

مثال:

إذا كانت $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2-x^2t^{-2}} dt \;,\; 0 < x < \infty$ فأثبت أن

$f'(x) = -2 f(x)$

من ثم أوجد $f(x)$

الحل:

$$f'(x) = -2x\int_0^\infty e^{-t^2-x^2t^{-2}} t^{-2} dt$$

$$= -2x\int_\infty^0 e^{-\frac{x^2}{y^2}-y^2}\left(-\frac{1}{x}dy\right) \;,\; \left(\frac{x}{t} = y\right)$$

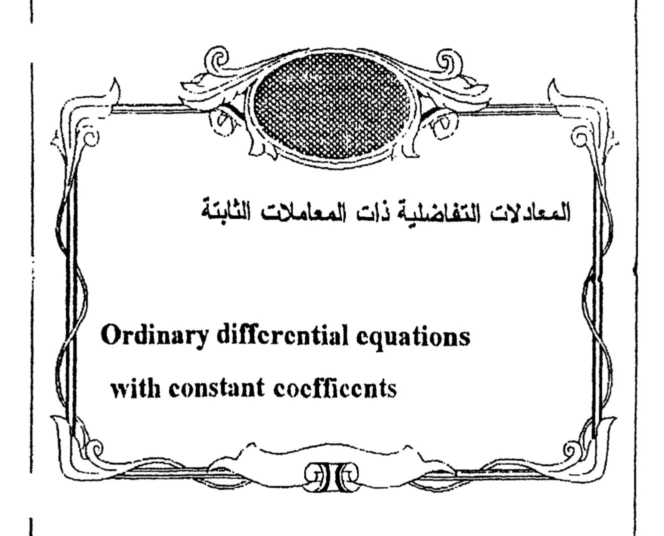
$$= -2f(x) \Rightarrow f(x) = ce^{-2x}$$

عند $x = 0$ نحصل على

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} dt \Rightarrow C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{i.e.,} \quad f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$$

الباب السادس



المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة

Ordinary differential equations with constant coefficents

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة

٦-١ مقدمة ومبادئ عامة

أشرنا فى دراسة سابقة طرق تكوين المعادلات التفاضلية العادية ـ الجزئية كما عرفنا رتبها وقوتها. سوف ندرس تفصيلا بعضا من المعادلات التفاضلية من رتب إعلى من الأولى.تسمى معادلة تفاضلية خطية إذا كانت من الدرجة الأولى ليس فقط فى المتغير التابع y ولكن أيضا فى جميع مشتقاته.
الصورة العامة لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة n هى

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)=f(x) \quad (1$$

حيث $a_0 \neq 0$ وجميع الدوال $\{a_i(x)\}$ وكذلك $f(x)$ دوال من x فقط.

إذا رمز للمؤثر $\frac{d^r}{dx^r}$ بالرمز D^r وللمؤثر

$$a_0(x)\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+a_n(x)\cdots(2)$$

بالرمز $L_n(D)$ أو ببساطة $L(D)$ أمكن كتابة المعادلة (1) بالهيئة

$$L_n(D)\, y=f(x)$$

يسمى التعبير $L_n(D)$ معامل تفاضلى خطى من الرتبة n. هذا التعبير ليس مقدارا جبريا مضروبا فى y ولكنه رمز يعبر عن عمليات تفاضلية تجرى على y.

خواص المؤثرات $D^r, L(D)$.

للمؤثرات D الخواص الآتية:

$$(1) \quad D^m(u+v)=D^m u+D^m v$$

(2) $D^m D^n u = D^{m+n} u$

(3) $D^m (D^n u) = D^n (D^m u)$

(4) $D^m (cu) = c D^m u$

بينما للمؤثر L(D) الخاصيتين التاليتين

$$(5)\ L(D)\ (u+v) = a_0 D^n\ (u+v)\ + a_1 D^{n-1}\ (u+v) + \dots$$

$$+ a_{n-1} D(u+v)\ + a_n (u+v)$$

$$= a_0 D^n u + a_1 D^{n-1} u + \dots + a_{n-1} Du + a_n u$$

$$+ a_0 D^n v + a_1 D^{n-1} v + \dots + a_{n-1} Dv + a_n v$$

$$= L(D)\ u + L(D)\ v$$

$$(6)\ L(D)\ (cu) = ca_0 D^n u + ca_1 D^{n-1} u + \dots + ca_{n-1} Du + ca_n u = c L(D)\ u$$

من (5) ,(6) يأتى وصف المؤثر L(D) بالخطية.

من الخواص السابقة يمكن التحقق من إمكانية تحليل مؤثر تفاضلى إلى عوامل كما لو عولج كمقدار جبرى. على سبيل المثال يمكن أن نكتب المؤثرات الآتية على هيئة عوامل من مؤثرات.

$$2x^2 D^2 + 5xD + 6 \equiv (2xD+3)\ \ (xD+2)$$

$$2D^2 + 5D + 2 \equiv (2D+1)\ \ (D+2)$$

من الخواص الهامة للمؤثرات الخطية ذات المعاملات الثابتة خاصية الإبدال بمعنى أنه إذا كان L(D)، S(D) مؤثرين خطيين معاملاتهما ثابتة فإن

$$L(D)\ S(D)\ y = S(D)\ \ L(D)\ y$$

تسمى المعادلــة التفاضليــة (1) غير متجانسـة (Non homogeneous) إذا كـانت $f(x) \neq 0$ وإلا سميت متجانسـة (Homogeneous) أو مختزنـة (Reduced). من الملامح الرئيسية لحل معادلـة تفاضليـة متجانسـة النظريـة التالية:

نظرية:

إذا كانت $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حـلولا للمعـــادلة L (D) y = 0 فإنه لأى ثوابت إختيارية $\{c_i\}$ تكون الدالة $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ أيضا حلا.

الإثبات:

نعتبر

$$L(D)\ (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n)$$

من الخواص الخطية (3) ,(4) للمؤثر التفاضلى الخطى L(D) نحصل على

$$L(D)\ (c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n) = c_1 L(D)\ y_1 + \ldots + c_n L(D)\ y_n = 0$$

وذلك لأن $L(D)\ y_i = 0$ لجميع قيم $(i = 1, \ldots n)$.

يمكن أن نصيغ النظرية السابقة لفظيا كالآتى:

اى تركيب خطى من مجموعة حلـول معادلـة تفاضليـة خطيـة متجانسة هو أيضا حل للمعادلة التفاضلية.

يرتبط دائما حل معادلة تفاضلية غير متجانسة L (D) y = f (x) بحل المعادلة التفاضلية المتجانسة أو المختزلة L(D) y = 0 حسب النظرية التالية.

نظرية:

إذا كـان y_p أى حـل خـاص للمعادلـة (1) وكان y_c حل للمعادلة $L(D)\ y = 0$ فإن $y_c + y_p$ يكون حلا للمعادلـة (1).

الإثبات:

حيث أن $L(D)\ y_p = f(x)$ وأن $L(D)\ y_c = 0$ من ثم وباعتبار خطية المؤثر $L(D)$ نحصل على

$$L(D)\ (y_c + y_p) = L(D)\ y_c + L(D)\ y_p = f(x)$$

من النظرية السابقة نرى أن الحل العام للمعادلة (1) يتكون من مجموع حلين، الحل y_c وهو حل المعادلة المتجانسة ويسمى الحل المتمم (Complementary Solution) أو الدالة المتممة أو الحل العارض (Transient Solution) والحل y_p وهو أى حل يحقق (1) ويسمى حلا خاصا (Particular Solution) للمعادلة غير المتجانسة.

مقارنة بالمعادلات الخطية الجبرية يكمن أن نقول أن (3,1,2) هو حل خاص للمعادلة x+y-z= 2 لإيجاد الحل العام للمعادلة السابقة يجب إضافة الحل المتمم وهو حل المعادلة المتجانسة x+y-z= 0 وهو (A, B, A+B) والذى يمكن كتابته بالهيئة + A(1,0,1) B(0,1,1) ومن ثم يكون الحل العام للمعادلة الأولى هو:

(3,1,2) + A(1,0,1) + B (0,1,1) •

يجب *أن نلاحظ أن:*

١. المتجهان (1,0,1), (0,1,1) مستقلان خطياً

٢. أى حل للمعادلة الجبرية يمكن أستنتاجه من الحل *

من النظريات المرتبطة بخطية L(D) و المتعلقة بجمع الحلول النظرية التالية.

نظرية:

إذا كانت $(y_i = i=1,2,\ldots,m)$ حلولا خاصة للمعادلة

$$L_n(D)\ y = f_1(x)$$

فإن $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ هو حل خاص للمعادلة

$$L_n(D)\ y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$$

إثبات هذه النظرية يتحقق مباشرة من خاصية خطية المؤثر $L_n(D)$.

إستخدام حل معروف لإيجاد حل آخر

لا توجد طريقة تحليلية عامة لإيجاد حلول معادلة تفاضلية سواء كانت غير متجانسة أو متجانسة. هذه الصعوبة يمكن في بعض الأوقات تجنبها ببعض المعطيات كإيجاد الحل العام لمعادلة تفاضلية معلوم دالتها المتممة (في هذه الحالة سنلجأ لطريقة تغيير البارامترات التي سنعرضها لاحقا) أو إختزال رتبة معادلة تفاضلية بمعلومية أحد حلولها. في الحالة الأخيرة يمكن إيجاد الحل الثاني ومن ثم الحل العام إذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة ومن الرتبة الثانية.

نفرض أن $y = u$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \qquad (5)$$

بفرض حلها العام على الهيئة $y = uv$ أي بإستبدال المتغير التابع y بالمتغير v نحصل على

$$uv'' + v'(2u' + pu) + v(u'' + pu' + qu) = 0 \qquad (6)$$

ينعدم الحد الأخير في المعادلة السابقة بسبب أن u حل للمعادلة المتممة ومن ثم نحصل على

$$v''/v' = \frac{-2u'}{u} - p \qquad (7)$$

بالتكامل نحصل على

$$\ln v' = -2\ln u - \int p\, dx + \ln A$$

$$i.e.\ \ v' = \frac{A}{u^2}\, e^{-\int p\, dx}$$

ومن ثم فإن

$$v = A\int \frac{1}{u^2}\, e^{-\int p\,dx}\, dx + B \qquad (8)$$

ويصبح الحل العام مساويا

$$y = uv = Au\int \frac{1}{u^2}\, e^{-\int p\,dx}\, dx + Bu$$

الدالة $y_1 = u$ ظهرت كأحد الحلول ويصبح الحل الثانى مساويا

$$y_2 = u\int \frac{1}{u^2}\, e^{-\int p\,dx}\, dx \qquad (9)$$

العرض السابق يوضح أنه يمكن إختزال رتبة معادلة تفاضلية متجانسة أو غير متجانسة بمقدار وحده بمعلومية أحد حلول المعادلة المتجانسة.

من الممكن الحصول على النتيجة السابقة بطريقة أخرى كالآتى:

نفرض أن y_1 , y_2 حلان مستقلان للمعادلة التفاضلية، من ثم

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \quad (1) , \qquad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \quad (2)$$

بضرب المعادلة الأولى فى y_2 والثانية فى y_1 ثم الطرح نحصل على

$$y_2'' y_1 - y_1'' y_2 + p(y_2' y_1 - y_1' y_2) = 0$$

بوضع

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

نحصل على

$$W' + PW = 0 \rightarrow \ln W = \int -p\,dx \rightarrow W = e^{-\int p\,dx}$$

$$i.e., \quad y_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = e^{-\int p\,dx}$$

$$or \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p\,dx}$$

بالتكامل نحصل على الحل الثانى y_2 بدلالة y_1

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p\,dx}\, dx \qquad (10)$$

٢–٦ معادلات تفاضلية متجانسة ذات معاملات ثابتة

الصيغة العامة لمعادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة هى

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n)\ y = f(x) \qquad (11)$$

حيث جميع المعاملات (a_i) ثوابت والتى يمكن أن تكتب فى حالة الرتبة الثانية بالهيئة

$$(a D^2 + b D + c)\ y = f(x) \cdot \qquad (12)$$

سوف نبدأ بالبحث عن حل معادلة متجانسة من الرتبة الثانية

$$(a D^2 + b D + c)\ y = 0 \qquad (13)$$

وذلك بفرض حل $y = Ae^{mx}$ حيث m ثابت نزمع حسابه. بالتعويض فى المعادلة التفاضلية

$$Ae^{mx}\ (am^2 + bm + c) = 0 \cdot$$

حيث أن e^{mx} لايمكن أن تساوى صفرا وحيث أن مساواة A بالصفر يؤدى إلى الحل التافه $y = 0$ والذى لانهتم به لذا وجب أن يكون

$$am^2 + bm + c = 0 \qquad (14)$$

وهى معادلة جبرية تعرف بإسم المعادلة المساعدة (Auxiliary Equation). جذور هذه المعادلة تميز الحلول الممكنة وغير التافهة للمعادلة المعطاه. بمطابقة صيغة المعادلة بصيغة المؤثر التفاضلي يمكن أن نكشف طريقة عملية لكتابة المعادلة المساعدة وهى أن نساوى المعامل التفاضلي بالصفر على أن يلعب D فى هذه الحالة دور m وتصبح المعادلة المساعدة

$$a D^2 + bD + c = 0$$

المعادلة المساعدة فى الحالة السابقة معادلة من الدرجة الثانية وجذورها إما أن تكون حقيقية مختلفة أو حقيقية متساوية أو مركبة مترافقة. لإيجاد حل (13) ندرس الحالات الآتية:

حالة ١:

للمعادلة المساعدة جذران مختلفان m_1 , m_2 فى هذه الحالة نحصل على الحلين المستقلين $y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}$.

ومن ثم يكون حل (13) العام هو تركيب خطى إختيارى من $e^{m_1 x}$, $e^{m_2 x}$

$$y = Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x}$$

مثال ١:

أوجد الحل العام للمعادلة $(D^2 - 3D - 4)\, y = 0$

المعادلة المساعدة هى $(D+1)\ (D-4) = (D^2 - 3D - 4) = 0$

وجذورها 1- , 4 . من ثم يكون الحل العام مساويا

$$y = A e^{4x} + B e^{-x}$$

حالة ٢:

للمعادلة المساعدة جذران حقيقيان متساويان m , m.

في هذه الحالة نحصل على حل واحد $y_1 = e^{mx}$ للحصول على الحل الثاني نستخدم الصيغة (10)

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p\, dx} dx$$

وحيث أن الجذرين متساويان $m + m = 2m = -b/a$ بالتالي

$$y_2 = e^{mx} \int e^{-2mx} e^{-\int b/a\, dx} dx = e^{mx} \int e^{-2mx} e^{-\int -2m\, dx} dx$$

$$= \frac{e^{mx}}{2m} \int dx = \frac{x}{2m} e^{mx}$$

ويكون الحل العام مساويا

$$y = e^{mx} (A + Bx)$$

مثال ٢:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(D^2 - 6D + 9)\, y = 0$

المعادلة المساعدة

$$0 = D^2 - 6D + 9 = (D - 3)^2$$

وجذورها 3 , 3 ومن ثم يكون الحل العام مساويا

$$y = e^{3x} (A + Bx)$$

حالة ٣:

للمعادلة المساعدة جذران تخيليان مترافقان $\alpha \pm i\beta$ ،

في هـــذه الحـــالة تكـــون المعـــادلة المســـاعدة هي $m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2) = 0$ وتكون المعادلة التفاضلية هي

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)\, y = 0$$

. الحل بالهيئة $y = Me^{(\alpha + i\beta)x} + Ne^{(\alpha - i\beta)x}$ يمثل بدوال مركبة وليس بدوال حقيقة كما نتوقع ونرغب. لذا وجب تحويل صيغة الحل السابقة إلى صيغة من دوال حقيقية يمكن قبولها

$$y = Me^{(\alpha + i\beta)x} + Ne^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= Me^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + Ne^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

$$= (M+N)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + (M-N)\, i\, e^{\alpha x} \sin \beta x$$

يمكن التحقق من أن الدالتين $e^{\alpha x} \cos \beta x \ , \ e^{\alpha x} \sin \beta x$ مستقلتان خطيا ويحققان المعادلة التفاضلية. على سبيل المثال نعتبر الدالة $y = e^{\alpha x} \cos \beta x$.

$$y = e^{\alpha x} \cos \beta x \rightarrow y' = \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\rightarrow y'' = e^{\alpha x} (\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x)$$

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)\, y = e^{\alpha x} [\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x$$

$$- 2\alpha (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + (\alpha^2 + \beta^2) \cos \beta x] = 0$$

من ثم يكــون الحل العـام عندمـا تكون الجذور تخيليـة مترافقـة بالهيئة $\alpha \pm i\beta$ مساويا

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

مثال ٣:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(D^2 - 4D + 13)\, y = 0$

المعادلة المساعدة هي

$$0 = D^2 - 4D + 13 = (D-2)^2 + 9 \rightarrow D = 2 \pm 3i$$

من ثم فإن الحل العام يساوي

$$y = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

٣-٦ معادلات متجانسة من رتب أعلى

حل معادلة تفاضلية متجانسة ذات معاملات ثابتة من رتبة أعلى من الرتبة الثانية

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n)\, y = 0 \quad n > 2 \ , \ a_0 \neq 0$$

يجرى على نفس الوتيرة كحالة الرتبة الثانية. التعويض $y = Ae^{mx}$ يحول حل المعادلة التفاضلية إلى حل المعادلة الجبرية المساعدة

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

إذا كان m_1 جذرا حقيقيا للمعادلة غير مكرر كان الحل المقابل هو $e^{m_1 x}$

إذا كان m_1 جذرا حقيقيا للمعادلة مكررا k من المرات كانت الحلول المقابلة هي $e^{m_1 x}\ , \ xe^{m_1 x}\ , \ x^2 e^{m_1 x}\ , \ \ldots\ , \ x^{k-1} e^{m_1 x}$

إذا كان الجذران التخيليان المترافقان $\alpha \pm i\beta$ مكررين k من المرات كانت الحلول المقابلة هى

$$e^{\alpha x}\left[\left(A_1 + A_2 x + \dots + A_k x^{k-1}\right)\cos\beta x + \left(B_1 + B_2 x + \dots + B_k x^{k-1}\right)\sin\beta x\right].$$

مثال ٤:

حل المعادلة $(D^3 + 6D^2 + 12D + 8)\,y = 0$

المعادلة المساعدة

$$0 = (D^3 + 6D^2 + 12D + 8) = (D + 2)^3$$

وجذورها تساوى 2-, 2-, 2- ومن ثم فإن الحل العام يساوى

$$y = (A + Bx + Cx^2)\,e^{-2x}$$

مثال ٥:

حل المعادلة

$$(D^5 - 2D^4 + 8D^3 - 16D^2 + 16D - 32)\,y = 0$$

المعادلة المساعدة

$$0 = (D^5 - 2D^4 + 8D^3 - 16D^2 + 16D - 32) = (D - 2)\,(D^2 + 4)^2$$

وجذورها هى $2, \pm 2i, \pm 2i$ والحل العام للمعادلة يساوى

$$y = Ae^{2x} + (A_1 + A_2 x)\cos 2x + (B_1 + B_2 x)\sin 2x$$

المؤثرات العكسية (Inverse Operators)

سوف نعرض للطرق الرمزية لتعيين الحلول الخاصة من خلال عرض مفهوم وخواص المؤثرات العكسية. حتى الآن تعرضنا لمؤثرات $L(D)$ محتوية على قوى موجبة للمؤثر D. حيث أن عملية التفاضل $\frac{d}{dx}$. وعملية التكامل غير المحدد (ثابت التكامل غير ذى بال) $\int \ldots dx$ عمليتان عكسيتان.أى عند تطبيق المؤثرين بالتعاقب يعطيان مؤثر الوحدة

$$i.e. \qquad \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) = \int \frac{d}{dx}\; f(x)\,dx$$

لذا نرى أنه إذا رمزنا لعملية التفاضل بالرمز D فإنه من المناسب والطبيعى أن نرمز لعملية التكامل بالرمز $1/D$ أو D^{-1} بالمثل $D^{-r}u$ تعبر عن فيض من r من التكاملات المتتابعة بالنسبة إلى x للدالة u. إمتدادا لهذه الصيغ الرمزية سوف نكتب $1/L(D)$ أو $L^{-1}(D)$ ليرمز للمؤثر العكسى للمؤثر $L(D)$. أى أن

$$L^{-1}(D)\; L(D)\; u = L(D)\; L^{-1}(D)\; u = u$$

نعلم كيفية إجراء المؤثر $L(D)$ علـى دالـة $f(x)$ بحكم تكوينـه ولكن المؤثر $1/L(D)$ يحتاج لإيضاح وتفسير تأثيره على الدالة $f(x)$.

نبدأ بإيضاح تأثير المؤثر $1/L_n(D)$ على دالة $f(x)$. بإعتبار الحالة $n = 1$.

أى نعتبر

$$y = \frac{1}{L_1(D)}\, f(x) = \frac{1}{D-a}\; f(x) \;.$$

هذا التأثير يكافئ حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

$$(D-a)\ y = f(x).$$

حل هذه المعادلة يساوى

$$y = Ae^{ax} + e^{ax} \int e^{-ax} f(x)\ dx$$

بإهمال الحد Ae^{ax} بإعتبار أن هـذا الحد يظهر فـى الدالـة المتممـة عند إعتبار معادلات تفاضلية من رتـب أعلـى مـن الأولـى والتركيز على الحد الثانى بإعتباره مقدمة لإيجاد تفسير لعمل المؤثر $1/L(D)$ علـى دالـة $f(x)$. نعتبر

$$y_p = e^{ax} \int e^{-ax} f(x)\ dx$$

سوف ندرس الحالات الآتية:

حالة ١:

$$f(x) = x^n$$

$$y_p = e^{ax} \int e^{-ax} x^n\ dx = e^{ax} [-\frac{1}{a} x^n e^{-ax} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{-ax}\ dx$$

$$= -\frac{x^n}{a} + \frac{n}{a} \frac{1}{D-a} x^{n-1} = -\frac{x^n}{a} - \frac{n}{a^2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} \frac{1}{D-a} x^{n-2}$$

$$= -\frac{x^n}{a} - \frac{n}{n^2} x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{a^2} x^{n-2} - \ldots - \frac{n!}{a^n}$$

النتيجة السابقة من الممكـن الحصول عليها بمعاملة $1/(D-a)$ معاملـة جبريـة وفكـه بنظريـة ذات الحدين فـى قـوى D التصـاعدية وتنفيذ المؤثرات الناتجة على x^n

$$\frac{1}{D-a} x^n = -\frac{1}{a} (1 - \frac{D}{a})^{-1} x^n$$

$$= -\frac{1}{a}\left(1 + \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} + \ldots + \frac{D^n}{a^n} + \ldots\right) x^n$$

$$= -\frac{x^n}{a} - \frac{n}{a^2} x^{n-1} - \ldots \frac{n!}{a^n}$$

العرض السابق يوضح الطريقة التى يمكن إتباعها عند تنفيذ المؤثر $1 / L(D)$ على كثيرة حدود وهى فك المقدار $1 / L(D)$ فى قوى D التصاعدية (بنظرية ذات الحدين أو بالقسمة) حتى قوى D التى تنعدم عندها كثيرة الحدود.

مثال ٦:

أوجد الحل الخاص للمعادلة $(D^2 - 3D + 1)\, y = x^3 + 2x$

بتنفيذ المؤثر العكسى على الطرفين نحصل على

$$y = \frac{1}{1 - 3D + D^2}\,(x^3 + 2x) = (1 + 3D - 8D^2 + 21D^3)\,(x^3 + 2x)$$

$$= x^3 + 9x^2 + 50x + 132$$

فى المثال السابق أوجدنا مفكوك $\frac{1}{1 - 3D + D^2}$ بقسمة البسط على المقام

مثال:

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 + 1)\, y = x^4 - 2$$

بالتأثير بالمؤثر العكسى ثم فكه بنظرية ذات الحدين

$$y = \frac{1}{1 + D^2}\,(x^4 - 2) = (1 - D^2 + D^4)\,(x^4 - 2) = x^4 - 12x^2 + 22$$

يمكن إيجاد الحل الخاص عندما يكون الطرف الأيمن ثابتا كالآتى:

مثال ٧:

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots a_{n-1} D + a_n)\, y = b \qquad a_n \neq 0$$

بالتأثير بالمؤثر العكسى نحصل على

$$y = \frac{1}{a_0 D^n + \dots + a_{n-1} D + a_n}\, b$$

حيث أننا فى مفكوك المؤثر العكسى لا نحتاج لأكثر من الحد الأول وهو الحد الذى ينتج بوضع D = 0 من ثم يكون الحل مساويا b/a_n .

إذا كان $a_n = 0$ فى المثال السابق فإن الحل الخاص يساوى

$$\frac{1}{n}\,\frac{b}{\cdot} = \frac{bx}{a_{n-1}}$$

حالة ٢: $f(x) = e^{bx}$ حيث $b \neq a$

$$y_p = \frac{1}{D-a}\, e^{bx} = e^{ax} \int e^{-ax}\, e^{bx} \cdot dx = \frac{1}{b-a}\, e^{bx}$$

$$y_p = \frac{1}{D-a}\, e^{bx} = e^{ax} \int e^{-ax}\, e^{bx}\, dx = \frac{1}{b-a}\, e^{bx}$$

أى أن الحل الخاص ينتج بوضع b بدلا من D شرط الا ينعدم المقام أى إذا كان $b \neq a$

مثال ٨: أوجد الحل الخاص للمعادلة $(D^2 - 3D + 5)\, y = e^{2x}$

بالتأثير بالمؤثر العكسى نحصل على

$$y = \frac{1}{D^2 - 3D + 5}\, e^{2x} = \frac{1}{4 - 6 + 5}\, e^{2x} = \frac{1}{3}\, e^{2x}$$

مثال: لإيجاد الحل الخاص للمعادلة $(D + \ln a)^2 = a^x$

نؤثر بالمؤثر العكسى

$$y = \frac{1}{(D + \ln a)^2}\, a^x = \frac{1}{(D + \ln a)^2}\, e^{x \ln a}$$

$$= \frac{1}{(2 \ln a)^2}\, e^{x \ln a} = \frac{1}{4 \ln^2 a}\, a^x$$

حالة٣:

$$f(x) = e^{ax}$$

لعلاج هذه الحالة نعتبر الحالة $f(x) = e^{bx}\, g(x)$

$$y = \frac{1}{D-a} e^{bx} g(x) \Rightarrow y = e^{ax} \int e^{-ax} e^{bx} g(x)\, dx$$

$$= e^{bx} e^{(a-b)x} \int e^{-(a-b)x} g(x) \cdot dx = e^{bx} \frac{1}{D-a+b} g(x)$$

أى أن

$$\frac{1}{D-a} e^{bx} g(x) = e^{bx} \frac{1}{D+b-a} g(x)$$

تسمى القاعدة السابقة قاعدة الإزاحة (The shift rule) وهى تمكننا من إزاحة دالة أسية e^{bx} مضروبة فى دالة أخرى من نطاق التأثير شريطة وضع $D+b$ بدلا من D. يمكننا بسهولة إثبات أن

$$L(D)\, e^{bx} g(x) = e^{bx} L(D+b)\, g(x)$$

مثال ٩:

أوجد الحل الخاص للمعادلة $(D^2 - 4D + 4)\, y = x^2 e^{2x}$ بالتأثير بالمؤثر العكسى

$$y = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} x^2 e^{2x} = e^{2x} \frac{1}{(D+2)^2 - 4(D+2) + 4} x^2$$

$$= e^{2x} \frac{1}{D^2} x^2 = \frac{1}{12} x^4 e^{2x}$$

مثال ١٠:

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $(D^2-3D+2)\,y=e^{2x}$

بالتأثير بالمؤثر العكسى

$$y=\frac{1}{D^2-3D+2}\,e^{2x}=\frac{1}{(D-2)\,(D-1)}\,e^{2x}=\frac{1}{D-2}\;\frac{1}{D-1}\;e^{2x}$$

$$=\frac{1}{D-2}\;\left(\frac{1}{2-1}\,e^{2x}\right)\;=\;e^{2x}\,\frac{1}{D+2-2}\,1=x\,e^{2x}$$

حالة ٤:

$$f(x)=\cos\omega x$$

سنعتبر فى هذه الحالة إيجاد الحل الخاص للمعادلة

$$(aD^2+bD+c)\;y=\cos\omega x$$

أى أن

$$y=\frac{1}{aD^2+bD+c}\cos\omega x=Re\,\frac{1}{aD^2+bD+c}\,e^{i\omega x}$$

$$=\;Re\,\frac{1}{-a\omega^2+bD+c}\,e^{i\omega x}=Re\,\frac{1}{c-a\omega^2+bD}\,e^{i\omega x}$$

$$=Re\,\frac{c-a\omega^2-bD}{(c-\omega^2)^2-b^2D^2}\,e^{i\omega x}=Re\,\frac{c-a\omega^2-bD}{(c-a\omega^2)^2+\omega^2b^2}\,e^{i\omega x}$$

$$=\frac{c-a\omega^2-bD}{(c-a\omega^2)^2+\omega^2b^2}\,\cos\omega x$$

بهذا يتحول المؤثر العكسى إلى مؤثر تفاضلى يمكن تنفيذه. الخطوات السابقة يتم إنجازها مباشرة كالآتى. نضع $-\omega^2$ بدلا من D^2 ليتحول المؤثر العكسى إلى مؤثر على الهيئة $1/(lD+m)$. بالتأثير على

كل من البسط والمقام بالمؤثر المرافق $\ell D - m$ نحصل على $(\ell D - m) / (\ell^2 D^2 - m^2)$. نضع مرة أخرى $-\omega^2$ بدلا من D^2 ليتحول المؤثر فى النهاية الى $(\ell D-m) / (-\omega^2 \ell^2 - m^2)$ وهو مؤثر مباشر يمكن تنفيذه .

مثال ١١:

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^2 + 3D+2)\, y = \cos 2x$$

كالمعتاد نؤثر على كلا الطرفين بالمؤثر العكسى

$$y = \frac{1}{D^2+3D+2} \cos 2x = \frac{1}{-4+3D+2} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{3D-2} \cos 2x = \frac{3D+2}{9D^2-4} \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{40} \, (-6 \sin 2x + 2 \cos 2x)$$

بصورة مطابقة تماما تعالج الحالة $(aD^2 + bD + c)\, y = \sin \omega x$

حالة ٥:

المعادلة $(D^2 + n^2)\, y = \cos nx \text{ or } \sin nx$

سنعتبر الحالة $(D^2 + n^2)\, y = \cos nx$

$$y = \frac{1}{D^2+n^2} \cos nx = Re \frac{1}{(D-in)\,(D+in)} e^{inx}$$

$$= Re \frac{1}{D-in} \left[\frac{1}{D+in} e^{inx} \right] = Re \frac{1}{D-in} \frac{1}{2in} e^{inx}$$

$$= Re\, e^{inx} \frac{1}{D+in-in} \left(\frac{-i}{2n}\right) = Re\, e^{inx} \int \frac{-i}{2n}\, dx$$

$$= Re\left\{-\frac{i}{2n}\, x(\cos nx + i \sin nx)\right\} = \frac{x}{2} \frac{\sin nx}{n} \ ,$$

بنفس الطريقة نحصل على

$$(D^2+n^2)y = \sin nx \Rightarrow y = \frac{x}{2}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) .$$

٥-٦ طريقة المعاملات غير المعينة
(Undetermined Coefficients)

هى واحدة من الطرق التى تعالج مسائل بسيطة ومن مميزاتها إعتمادها على التفاضل بدلا من التكامل. نوضح هذه الطريقة بإيجاد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' - 2y' + 3y = 12\, e^{3x}$$

حيث أن مشتقة دالة أسية تبقى الدالة الأسية كما هى وتحدث تغييرا ى حدود المعامل على الأكثر من ثم يمكن أن نفرض حلا على لهيئة $y_p = Ae^{3x}$ بالتعويض فى المعادلة

$$9A\, e^{3x} - 6\, Ae^{3x} + 3\, e^{3x} = 6\, A\, e^{3x} = 12\, e^{3x} \Rightarrow A = 2$$

ى أن $y_p = 2e^{3x}$ هو حل خاص للمعادلة المعطاه.

إذا وضعنا $\cos 3x$ بدلا من $12\, e^{3x}$ فى المعادلة التفاضلية السابقة

$$y'' - 2y' + 3y = \cos 3x$$

وإفترضنا حلا خاصا $y = A\cos 3x$. بالتعوض فى المعادلة نرى أن

$$-6A\cos 3x + 6A\sin 3x = \cos 3x$$

وحيث أن $\cos 3x\,,\ \sin 3x$ دالتان مستقلتان بالتالى لايمكن أن تتحقق المعادلة السابقة وهو ما يؤدى إلى وجوب إعادة فرض حل ندخل فيه حدا جديدا وهو

$$y_p = A\cos 3x + B\sin 3x$$

المثال السابق يقودنا إلى طريقة إيجابية بموجبها يمكن أن نفرض هيكلا للحل الخاص.

قاعدة:

إذا كان التفاضل المتكرر لدالة f(x) يؤدى إلى عدد منتهى من الدوال المستقلية خطيا من الممكن أن تكون على هيئة تركيب خطى فإن الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\,y = f(x)$$

يمكن ايجادة بطريقة المعاملات غير المعينة.

بشكل عام نتبع الأسلوب التالى:

١ – نفرض حلا y_p على هيئة تركيب خطى اختيارى من f(x) والدوال المستقلة خطيا التى تظهر فى تكرار مشتقاتها.

٢ – بالتعويض عن y_p فى المعادلة التفاضلية.

٣ – نحدد الثوابت الاختيارية فى y_p من التساوى التطابقى الناتج من التعويض.

فصول الدوال التى تؤدى هى ومشتقاتها إلى عدد منتهى من الدوال المستقلة خطيا هى:

k , x^n (n a positive integer) , e^{kx} , $\cos kx$, $\sin kx$

والدوال الناتجة منها بعمليات منتهية من الجمع والطرح والضرب.

إذا كانت f(x) مجموع منتهى من الدوال لكل منها خاصية أنها ومشتقاتها تؤدى إلى ظهور عدد منتهى من الدوال المستقلة خطيا أمكن إيجاد حل المعادلة بطريقتين. إما أن نعالج f(x) جملة أو بحل المعادلة مع كل حد من حدود الجمع ثم نستخدم خاصية تجميع الحلول فى حالة المؤثرات الخطية.

مثال ١٢:

لحل المعادلة التفاضلية

$$(D^2-3D+2)\,y=x^2+2x+3$$

نفرض حلا خاصا على الهيئة $y_p=a+bx+cx^2$

$$(D^2-3D+2)\,y_p=2c-3\,(2cx+b)+2\,(a+bx+cx^2)$$

$$=x^2+2x+3$$

بمساواة المعاملات المتناظرة نحصل على

$$1=2c \quad , 2=2b-6c \quad , 3=2c-3b+2a$$

من ثم

$$c=\frac{1}{2} \quad , b=\frac{5}{2} \quad , a=\frac{19}{4}$$

أى أن الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{4}\ (19 + 10x + 2x^2)$$

الحل المتمم

$$y = Ae^x + Be^{2x}$$

الحل العام

$$y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{4}\ (19 + 10x + 2x^2)$$

نعرض الآن لمعادلات تفاضلية ذات معاملات متغيرة يمكن تحويلها إلى معادلات ذات معاملات ثابتة.

٦-٦ المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة

هذه معادلات بالهيئة

$$(a_0 x^n D^n + a_1 x^{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_n)\ y = f(x)$$

حيث $\{a_i\}$ ثوابت. نستخدم كلمة متجانسة هنا فى غير المعنى الذى ورد ذكره سابقا حيث التجانس هنا يعنى مساواة قوة x مع رتبة D فى كل حد من المعادلة. تسمى هذه المعادلات أيضا معادلات أويلر أو المعادلات متكافئة البعد (Equidimensional Equations).يمكن تحويل هذه المعادلات التفاضلية إلى معادلات تفاضلية ذات معاملات ثابتة بالتعويض التالى

$$x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t = x$$

هذا التعويض يؤدى إلى

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\rightarrow xDy=\theta y$$

حيث $\theta=\frac{d}{dt}$ بينما D كالمعتاد تقوم مقام $\frac{d}{dx}$

بالإستمرار بهذه الطريقة نحصل على المتساويات التأثيرية الآتية:

$$xD\equiv\theta\ ,\ x^2D^2\equiv\theta(\theta-1)\ ,\ x^3D^3\equiv\theta(\theta-1)(\theta-2)\ldots$$

$$x^nD^n\equiv\theta(\theta-1)\ldots(\theta-n+1)$$

من ثم تتحول المعادلة التفاضلية من معادلة تفاضلية ذات معاملات متغيرة فى D إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة فى θ

إذا كانت المعادلة بالهيئة

$$[a_0(bx+c)^nD^n+a_1(bx+c)^{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_n]\,y=f(x)$$

فإن التعويض $bx+c=e^t$ يؤدى إلى التكافؤات التأثيرية الآتية:

$$(bx+c)\,D\equiv b\theta\ ,\ (bx+c)^2D^2\equiv b^2\theta(\theta-1)\ ,$$

$$(bx+c)^3D^3\equiv b^3\theta(\theta-1)(\theta-2)\ ,\ \ldots$$

مثال ١٣:

لحل المعادلة التفاضلية

$$(x^3D^3+3x^2D^2+xD+8)\,y=65\cos(\ln x)$$

نضع $x=e^t$ لتتحول المعادلة إلى

$$[\theta(\theta-1)(\theta-2)+3\theta(\theta-1)+\theta+8]\,y=65\cos t$$

$$or\quad(\theta^3+8)\,y=65\cos t$$

المعادلة المساعدة

$$\theta^3+8=0 \rightarrow \theta=-2\,,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$$

الحل المتمم

$$y_c=Ae^{-2t}+e^{t}\,(B\cos\sqrt{3}\,t+C\sin\sqrt{3}\,t$$

الحل الخاص

$$y_p=\frac{1}{\theta^3+8}\,65\,cost=\frac{1}{8-\theta}\,65\,cost=\frac{8+\theta}{64-\theta^2}\,65\,cost$$

$$y_p=8\,cost-sint$$

الحل العام

$$y=Ae^{-2t}+e^{t}\,(B\cos\sqrt{3}\,t+C\sin\sqrt{3}\,t)\ +8\,cost-sint$$

$$=\frac{A}{x^2}+x\,[B\cos\,(\sqrt{3}\,\ln x)+C\sin\,(\sqrt{3}\,\ln x)]\ +$$

$$+\,8\cos\,(\ln x)-\sin\,(\ln x)$$

مثال ١٤:

لحل المعادلة التفاضلية

$$[(2x+1)^2D^2+4\,(2x+1)\,D+1]\,y=8x^2$$

نضع $2x+1=e^{t}$ لتتحول المعادلة التفاضلية إلى

$$[4\theta\,(\theta-1)\ +4\,(2\theta)\ +1]\,y=2\,[e^{t}-1]^2$$

or $$(4\theta^2+4\theta+1)\,y=2e^{2t}-4\,e^{t}+2$$

الحل المتمم

$$y_c = (A+Bt)\ e^{-t/2} = [A+B\ln(2x+1)]\ e^{-1/2\ln(2x+1)}$$

$$= \frac{A+B\ln(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)}}$$

الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{(2\theta+1)^2}\,2e^{2t} - 4e^{t} + 2 = \frac{2}{25}\,e^{2t} - \frac{4}{9}\,e^{t} + 2$$

الحل العام

$$y = \frac{[A+B\ln(2x+1)]}{\sqrt{2x+1}} + \frac{2}{25}(2x+1)^2 - \frac{4}{9}(2x+1) + 2\,،$$

تمارين

1- $(D^2-4D-21)y=0$

2- $(D-2)^3(D+1)y=0$

3- $(D^4-3D^3+3D^2-3D+2)y=0$

4- $(D^2+1)^2y=0$

5- $(D^3-4D^2+13D)y=1+\cos 2x$

6- $(D^2-4D-21)y=e^{-3x}$, $y(0)=y'(0)=0$

7- $(D^2+6D+9)y=27(1-x^2)$

8- $(D^2+2D+2)y=8(1+x+x^2)+\sin 2x$

9- $(D^3-3D^2+D-3)y=20\cos x+9x$

10- $(D^2-2D+5)y=e^x\cos^2 x$

11- $(2D^2-3D+1)y=\sinh x$

12- $(D^2+4D+4)y=8x^2+e^{-x}\sin x$

13- $(2D^2+D-1)y=8\sinh x+4\cosh x$

14- $(D^2-2\lambda D+\lambda^2)y=x$

١٥ – إذا كانت $(D^3-D+1)\,y=1$ وكان $y(0)=y(\pm a)=0$ فاثبت أن

$$y=a\left(\frac{\sinh x}{\sinh a}-\frac{x}{a}\right)$$

حل المعادلات التفاضلية الآتية:

16- $(x^2D^2-2xD+2)\,y=(x+1)^2\ ,\quad y(1)=\frac{3}{2}\ ,\quad y(e)=1/2$

17- $(x^2D^2-3xD+4)\,y=x^2+\ln x$

18- $(x^3D^3+xD+1)\,y=x^3$

19- $xy''-\frac{1}{x}y=x\ln x$

20- $(y''-\frac{1}{x}y'-\frac{3}{x^2}y)=x^2+10$

٢١ – حول المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=(2x-y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

حيث يصبح y هو المتغير المستقل بينما x هو المتغير التابع من ثم حل المعادلة الناتجة

٢٢ – إذا كانت p(D) كثيرة حدود فى $D=\frac{d}{dx}$ فاثبت أن

(i) $(D-a)^2 f(x)=e^{ax}D^2e^{-ax}f(x)$

(ii) $p(D)\,e^{ax}=p(a)\,e^{ax}$

والتى تقودنا إلى $\frac{1}{p(D)}e^{ax}=\frac{1}{p(a)}e^{ax}$ ما لم تكن $p(a)=0$

$$(iii) \quad p(D)\, e^{ax} v = e^{ax} p(D+a)\, v$$

٢٣ - إذا كانت $p(D) = (D-a)^r \phi(D)$ حيث $\phi(a) \neq 0$ فإن إستخدام قاعدة الإزاحة فى المسألة السابقة يمكن أن تقودنا إلى

$$\frac{1}{p(D)} e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^r \phi(D)} e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^r} \frac{1}{\phi(a)} e^{ax}$$

$$= \frac{e^{ax}}{\phi(a)} \frac{1}{D^r} 1$$

٢٤- إثبت أن

$$\phi(D^2) \cos \omega x = \phi(-\omega^2) \cos \omega x$$

٢٥- إذا كانت v دالة من x فإثبت أن

$$(i) \quad D^n (xv) = D^n v + n D^{n-1} v$$

$$(ii) \quad p(D)\,(xv) = x p(D)\, v + p'(D)\, v$$

ومن ثم فإن هذا يقودنا إلى

$$\frac{1}{p(D)} x v = \{x - \frac{1}{p(D)} p'(D)\} \frac{1}{p(D)} v$$

$$\frac{1}{p(D)} x^n v - \{x - \frac{1}{p(D)} p'(D)\}^n \frac{1}{p(D)} v$$

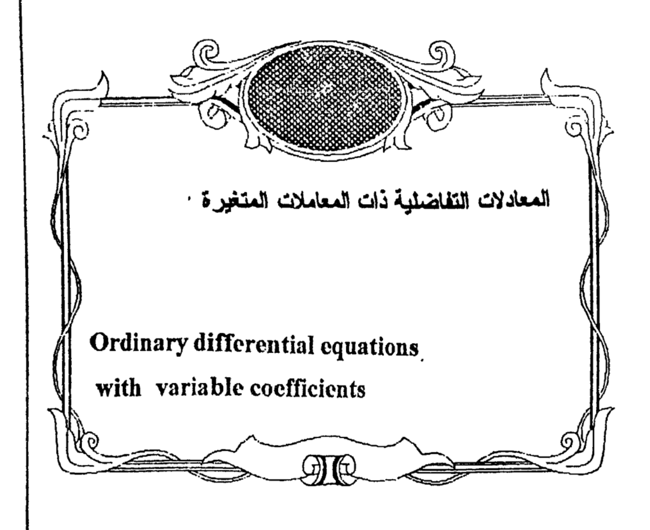
٢٦ - إثبت أن $(\cos ax - \cos (a+h) x) / [(a+h)^2 - a^2]$

هو حل المعادلة

$$(D^2 + a^2)\, y = \cos (a+h)\, x$$

من ثم إستنتج حل المعادلة

$$(D^2 + a^2)\, y = \cos ax$$



المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة ·

Ordinary differential equations with variable coefficients

طرق مختلفة لحل معادلات من الرتب الثانية أو أعلى

سوف نعالج فى هذا الباب بشكل أساسى طرق إختزال رتبة معادلة تفاضلية. سوف نوضح أنه يمكن إختزال رتبة معادلة إذا:

(١) لم تحتوى y صراحة.

(٢) لم تحتوى x صراحة.

سوف نعالج حلول المعادلات التفاضلية الخطية خلاف تلك التى تم علاجها فى باب سابق. سوف نوضح أيضا أن رتب هذه المعادلات يمكن إختزالها إذا:

(٣) أمكن تحليل المؤثر.

(٤) أمكن معرفة أحد حلول المعادلة المتممة.

يواكب الطريقة الأخيرة والتى تبنى على إستبدال المتغير التابع طريقتين أخريتين إحداهما ترتكز أيضا على إستبدال المتغير التابع وهى طريقة الإختزال للصيغة القياسية والأخرى ترتكز على إستبدال المتغير المستقل.

نعرض كذلك حل المعادلات التفاضلية التى يمكن معرفة حلها المتمم بطريقة تغيير البارامترات. هذه الطريقة تحتاج جهد كبير فى حلول معادلات آنية وكذلك إجراء التكاملات عند تطبيقها على معادلات تفاضلية من رتب أعلى من الثانية.

١-٧ معادلات خالية من y

إذا لم يظهر الحد y صراحة فى المعادلة التفاضلية نضع $\frac{dy}{dx} = p$

من ثم $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$ وهكذا. تختزل المعادلة بهذه الطريقة رتبة واحدة.

إذا لم يظهر كل من y ، $\frac{dy}{dx}$ صراحة في المعادلة نضع $\frac{d^2y}{dx^2}=p$ لتختزل رتبة المعادلة التفاضلية رتبتين ·

مثال ١:

لحل المعادلة $y''\sin x+2y'\cos x=1$ نضع $\frac{dy}{dx}=p$

لتصبح المعادلة بعد القسمة على $\sin x$ خطية من الرتبة الأولى

$$p'+2p\cot x=\operatorname{cosec} x$$

$$\mu=e^{2\int\cot x\,dx}=\sin^2 x$$

$$p\sin^2x=\int\sin^2x\operatorname{cosec} x\,dx=A-\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=p=A\operatorname{cosec}^2 x-\operatorname{cosec} x\cot x$$

$$y=-A\cot x+\operatorname{cosec} x+B$$

٢-٧ معادلات خالية من x

إذا خلت المعادلة صراحة من x نضع $\frac{dy}{dx}=p$ ثم نحول المشتقات الأعلى إلى مشتقات p بالنسبة إلى y. مثلا $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$ ·
بهذا تختزل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تفاضلية أقل رتبة في p,y.

مثال ٢:

لحل المعادلة التفاضلية $yy''+y'^2=y'$

نضع $y'=p$ ، $y''=p\frac{dp}{dy}$. لتتحول المعادلة إلى

$$yp\frac{dp}{dy}+p^2=p\Rightarrow\frac{dp}{1-p}=\frac{dy}{y}\Rightarrow-\ln(1-p)=\ln\frac{y}{A}$$

$$\Rightarrow 1-p=\frac{A}{y}\Rightarrow p=\frac{dy}{dx}=1-\frac{A}{y}\Rightarrow\left(1+\frac{A}{y-A}\right)dy=dx$$

$$\text{i.e.} \quad y + A\ln(y-A) = x + c$$

$$\text{or} \quad y = A + Be^{(x-y)/A}$$

مثال ٣:

لحل المعادلة التفاضلية $y'' = \frac{1}{2}f(y)$ والتى كثيرا ما تظهر عند دراسة حركة جسم مؤثر عليه بقوة متجهة إلى نقطة ثابتة وتعتمد قيمتها على البعد عن هذه النقطة، نقوم بضرب طرفى المعادلة فى $2y'$ ثم التكامل بالنسبة إلى x.

$$2y'y'' = f(y)\frac{dy}{dx} \Rightarrow y'^2 = \int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(y)\,dy.$$

٣-٧ تحليل المؤثر (Factorisation of the Operator)

طريقة تحليل المؤثر (إن أمكن التحليل) تعطى نتائج طيبة ولكنها من الصعوبة بمكان حيث أن التحليل قد لا يكون وحيدا. على سبيل المثال

$$(D^2-1)y = (D+1)(D-1)y = (D+\tanh x)(D-\tanh x)y$$

ليس هذا فقط بل أن عوامل تحليل مؤثر ليست بالضرورة إبدالية وعليه يجب التأكد من أن التحليل يؤدى إلى المعادلة التفاضلية المعطاه: على سبيل المثال

$$y'' + (x+\frac{1}{x})y' + 2y = (\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})(\frac{d}{dx}+x)y \neq (\frac{d}{dx}+x)(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})y$$

إذا أمكـن تحليل مؤثر المعـــادلة التفاضلية $F(D)\,y = f(x)$

إلــى $F(D) = \phi(D)\,\psi(D)$ فإنـه بوضــع $\psi(D)\,y = v$ يتحـول حـل المعادلة التفاضلية إلى حل معـادلتين تفـاضليتين بالتتـابع كلتاهمـا ذات رتبـة أقل من رتبة $F(D)$ ومجموع رتبتيهما تساوى رتبة $F(D)$

مثال ٤:

تتحلل المعادلة التفاضلية

$$(x^2D^2 + x(4+3x)\,D + 9x)\,y = 4xe^x$$

إلى

$$(xD+3x)\,(xD+3)\,y = 4xe^x$$

بوضع $(xD+3)\,y = v$ نحصل على

$$(xD+3x)\,v = x\,(D+3)\,v = 4xe^x$$

$$i.e \quad v = \frac{1}{D+3}\,4e^x = e^x + Ae^{-3x}$$

من ثم

$$(xD+3)\,y = e^x + Ae^{-3x} \rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}\,y = (e^x + Ae^{-3x})/x$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية، معاملها المكامل يساوى

$$\mu = e^{\int 3\,x dx} = x^3$$

حل المعادلة التفاضلية ينتج من

$$x^3y = \int x^3\,\frac{1}{x}\,(e^x + Ae^{-3x})\;dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$$
$$+Ae^{-3x}\,(9x^2 + 6x + 2) + B$$

$$i.e.. \quad y = x^{-3}\{e^x(x^2 - 2x + 2) + Ae^{-3x}\,(9x^2 + 6x + 2) + B\}$$

٤-٧- المعادلة متجانسة فى الدالة المجهولة ومشتقاتها:

يمكن إختزال رتبة المعادلة التفاضلية

$$f(x, y, y`, y``, \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$$

حيث

$$f(x, ty, ty`, \ldots\ldots ty^{(n)}) = t^k f$$

بأستخدام التعويض $y` = yz$

فى هذه الحالة

$$y` = yz \Rightarrow y`` = y(z^2 + z`),\ y``` = y(z`` + 3zz` + z^2), \ldots\ldots$$

مثال: لحل المعادلة التفاضلية

$$x^2 y\, y`` = (y - xy`)^2$$

نضع $y` = yz$

$$y` = yz \Rightarrow x^2 y^2 (z` + z^2) = y^2 (1 - xz)^2 \Rightarrow z` + z^2 = \left(\frac{1}{x} - z\right)^2$$

$$\Rightarrow z` + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2} \Rightarrow z = (x + A)/x^2 = y`/y$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{B} = \ln x - \frac{A}{x}$$

$$\Rightarrow y = Bx\, e^{-A/x}$$

٥-٧ معرفة أحد حلول الدالة المتممة

يمكن إنقاص رتبة معادلة تفاضلية خطية بمقدار وحدة دون المساس بخطية المعادلة عند معرفة أحد حلول معادلتها المختزلة. مثلا عند معرفة أحد حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$y'' + p(x)\, y' + Q(x) = 0$$

وليكن u = y.يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة

$$y'' + p(x)\, y' + Q(x)\, y = R(x)$$

بإستخدام التعويض y = uv حيث تختزل المعادلة التفاضلية إلى معادلة من الرتبة الأولى

$$y = uv \rightarrow y' = uv' + u'v\,,\; y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$uv'' + v'(2u' + pu) + v(u'' + pu' + Q) = R$$

حيث ينعدم معامل v لأن u تحقق الدالة المتممة ومن ثم تتحول المعادلة التفاضلية إلى

$$u\frac{dv'}{dx} + (2u' + pu)\, v' = R$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى فى v'.

مثال ٥:

سنوجد حل المعادلة $y'' + y' + e^{-2x} y = e^{-3x}$

إذا كان $y = \cos e^{-x}$ أحد حلول المعادلة المختزلة.

نتحقق أولا من أن $y = \cos e^{-x}$ تحقق المعادلة المختزلة

$$y' = e^{-x}\sin(e^{-x}) \ , \ y'' = -e^{-2x}\cos(e^{-x}) - e^{-x}\sin e^{-x}$$

بالتعويض فى المعادلة المختزلة

$$-e^{-2x}\cos(e^{-x}) - e^{-x}\sin(e^{-x}) + e^{-x}\sin(e^{-x})$$

$$+ e^{-2x}\cos e^{-x} = 0$$

نفرض حلا عاما للمعادلة الأولى بالهيئة $y = (\cos e^{-x})\, v$

$$y' = \cos e^{-x}\, v' + e^{-x}\sin(e^{-x})\, v$$

$$y'' = \cos e^{-x}\, v'' + 2\, e^{-x}\sin(e^{-x})\, v'$$

$$+ v\,(-e^{-2x}\cos e^{-x} - e^{-x}\sin e^{-x})$$

بالتعويض فى المعادلة والإختصار نحصل على

$$v''\cos e^{-x} + (2\, e^{-x}\sin e^{-x} + \cos e^{-x})\, v' = e^{-3x}$$

$$i.e., \qquad v'' + (2\, e^{-x}\tan e^{-x} + 1)\, v' = e^{-3x}/\cos e^{-x}$$

وهى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى فى v'. المعامل المكامل μ

$$\mu = e^{\int (2\, e^{-x}\tan e^{-x} + 1)\, dx} = e^{-2\ln\sec e^{-x} + x} = e^{x}\cos^2 e^{-x}$$

$$v'\, e^{x}\cos^2 e^{-x} = \int e^{x}\cos^2 e^{-x}\, \frac{e^{-3x}}{\cos e^{-x}}\, dx = \int e^{-2x}\cos e^{-x}\, dx$$

$$= -\int e^{-x}\cos e^{-x}\, de^{-x} = -e^{-x}\sin e^{-x} + \cos e^{-x} + A$$

$$v' = e^{-2x} \sec e^{-x} \tan e^{-x} + e^{-x} \sec e^{-x} + A\, e^{-x} \sec^2 e^{-x}$$

$$v = -\int (e^{-x} \sec e^{-x} \tan e^{-x} + \sec e^{-x} + A \sec^2 e^{-x})\, d\, e^{-x}$$

بوضع $e^{-x} = z$

$$v = -\int (z \sec z \tan z + \sec z + A \sec^2 z)\, dz$$

$$= -\int z\, d \sec z - \int \sec z\, dz + A \sec^2 z)\, dz$$

$$= -z \sec z + \int \sec z\, dz - \int \sec z\, dz + A \tan z + B$$

$$= -e^{-x} \sec e^{-x} + A \tan e^{-x} + B$$

يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة تفاضلية بهيئة تكامل كما يوضح المثال التالى:

مثال ٦:

.. إثبت أن e^{x^2} تحقق المعادلة المختزلة للمعادلة

$$y'' - 2x\, y' - 2y = 6x^2$$

ومن ثم أوجد المعادلة المعطاه ·

الحل:

بالتعويض عن $y = e^{x^2}$ فى المعادلة المختزلة

$$y = e^{x^2}\ ,\ y' = 2x\, e^{x^2}\ ,\ y'' = 4x^2\, e^{x^2} + 2\, e^{x^2}$$

$$y'' - 2xy' - 2y = e^{x^2}[4x^2 + 2 - 4x^2 - 2] = 0$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة غير المختزلة نفرض الحل بالهيئة $y = e^{x^2}\, v$

$$y' = e^{x^2}(v' + 2xv) \;,\; y'' = e^{x^2}(v'' + 3xv' + 4x^2 v + 2v)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية

$$e^{x^2}(v'' + 4xv' + 4x^2 v + 2v - 2xv' - 4x^2 v - 2v) = 6x^2$$

$$\to v'' + 2x\, v' = 6x^2\, e^{-x^2}$$

المعادلة الأخيرة خطية من الرتبة الأولى فى v'

$$\mu = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$v'\, e^{x^2} = \int e^{x^2}\, 6x^2\, e^{-x^2}\, dx = 2x^3 + A$$

$$v' = 2x^3\, e^{-x^2} + A\, e^{-x^2}$$

$$v = \int 2x^3\, e^{-x^2}\, dx + A\int e^{-x^2}\, dx + B$$

$$= -x^2\, e^{-x^2} - e^{-x^2} + A\int e^{-x^2}\, dx + B$$

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية من أكثر المعادلات شيوعا فى رياضيات الفيزياء، سوف نوجد صيغة يمكن من خلالها إيجاد حل ثان لمعادلة تفاضلية متجانسة بالهيئة $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0$ مستقل خطيا عن حل معلوم لها.

سوف نوضح أيضا من خلال هذه الصيغة أن رونسكين حلى معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية يمكن حسابه من بارامترات المعادلة التفاضلية (الدالة $p(x)$).

نفرض أن y_1 , y_2 حلان مستقلان للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\ \frac{dy}{dx} + q(x)\ y = 0$$

$$i.e. \quad y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \qquad (1)$$

$$y_2'' + p\, y_2' + q y_2 = 0 \qquad (2)$$

بضرب (1) فى y_2 وضرب (2) فى y_1 ثم الطرح نحصل على

$$y_1\, y_2'' - y_2\, y_1'' + p\,(y_1\, y_2' - y_2\, y_1') = 0$$

ولكن

$$W(y_1 , y_2) = y_1\, y_2' - y_2\, y_1'$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dx} = y_1\, y_2'' - y_2\, y_1''$$

من ثم

$$\frac{dW}{dx} + p\, W = 0$$

$$W = A\, e^{-\int p dx}$$

مع ملاحظة أن $e^{-\int p dx}$ لايمكن أن يساوى الصفر بالتالى فإن $W \neq 0$ طالما $A \neq 0$

حيث أن

$$W = y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

من ثم

$$y_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1}\right) = e^{-\int p dx}$$

$$\therefore \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y^2} dx$$

مثال ٧:

لإيجاد الحل العام للمعادلة $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ مع العلم بأن $y = x^2$ أحد حلولها، نوجد الحل الثانى

$$y_2 = y_1 \int \frac{\int e^{-pdx}}{y_1^2} dx = x^2 \int \left[\frac{1}{x^4} \int e^{-\int pdx} dx\right] dx$$

$$= x^2 \int \frac{1}{x^4} \; \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{4x^2}$$

الحل العام

$$y = Ax^2 + \frac{B}{x^2}$$

٦-٧ الإختزال للصيغة القياسية

(Reduction to Canonical or Normal Form)

تبنى هذه الطريقة على إختزال المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = R(x)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + S(x)\, v = T(x)$$

وذلك بإستبدال المتغير التابع y بمتغير تابع v بالتعويض $y = uv$ بحيث يؤدى إختيار الدالة u إلى حذف الحد الثانى من المعادلة. تكون هذه الطريقة إيجابية فقط إذا أمكن حل المعادلة التفاضلية الأخيرة (كأن تكون الدالة $S(x)$ ثابتة أو بالهيئة $S(x) = \frac{A}{(ax+b)^2}$). نعود لكيفية ايجاد الدالة u

$$y = uv\,,\ y' = uv' + u'v\,,\ y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{2}{u}\frac{du}{dx} + P\right)\frac{dv}{dx} + \frac{1}{u}\left(\frac{d^2 u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu\right) v = R/u$$

لحذف الحد الثانى نختار u بحيث

$$\frac{2}{u}\frac{du}{dx} + P = 0$$

$$i.e.\quad u = e^{-1/2\int P(x)\,dx}$$

مثال ٨:

لحل المعادلة التفاضلية

$$y'' + 2y'\tan x + 2y\tan^2 x = \cos^2 x$$

نضع $y = uv$ حيث

$$u = e^{-1/2\int P dx} = e^{-1/2\int 2\tan x\, dx} = \cos x$$

$$y = v\cos x\,,\ y' = v'\cos x - v\sin x$$

$$y'' = v'' \cos x - 2\, v' \sin x - v \cos x$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية

$$v'' \cos x - 2v' \sin x - v \cos x + 2 \tan x\, (v' \cos x - v \sin x)$$

$$+ 2 \tan^2 x\, (v \cos x) = \cos^2 x$$

$$i.e. \quad v'' \cos x - v \cos x = \cos^2 x \Rightarrow v'' - v = \cos x$$

$$or \quad (D^2 - 1)\, v = \cos x$$

الحل المتمم

$$v_c = A\, e^{-x} + B e^{x}$$

الحل الخاص

$$v_p = \frac{1}{D^2 - 1} \cos x = -\frac{1}{2} \cos x$$

الحل العام للمعادلة الأصلية

$$y = uv = \cos x\, (A\, e^{-x} + B\, e^{x} - \frac{1}{2} \cos x)$$

٧-٧ إستبدال المتغير المستقل

بإستخدام التحويل $t = f(x)$ وإجراء المشتقات

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\, \frac{dt}{dx} ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt}\, \frac{d^2t}{dx^2}$$

ثم بالتعويض فى المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\ \frac{dy}{dx} + Q(x)\ y = R(x)$$

نحصل على

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\frac{d^2t}{dx^2} + P\frac{dt}{dx}}{(\frac{dt}{dx})^2}\ (\frac{dy}{dt}) + \frac{Qy}{(\frac{dt}{dx})^2} = \frac{R}{(\frac{dt}{dx})^2}$$

إذا إخترنا $f(t)$ بحيث $\frac{dt}{dx} = \sqrt{\pm Q/a^2}$ (تختار الإشارة التى تؤدى إلى أن يكون $\frac{dt}{dx}$ حقيقيا ويختار الثابت a^2 بشكل مناسب) وكان معامل الحد الأوسط ثابتا، تتحول المعادلة التفاضلية الى معادلة ذات معاملات ثابتة (المسائل التى تعالج بهذه الطريقة وبطريقة التحويل الى الصيغة القياسية غالبا ما تكون مصطنعة).

مثال ٩:

لحل المعادلة

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{1+4x^2}{x})\ \frac{dy}{dx} - 12x^2y = 40\ x^2 \sin x^2$$

نختبر وضع $t = f(x)$ حيث

$$(\frac{dt}{dx})^2 = \frac{-Q}{a^2} = \frac{12x^2}{3} = 4x^2$$

$$i.e.\quad \frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow t = x^2$$

من ثم

$$\left(\frac{d^2t}{dx^2}+P\frac{dt}{dx}\right)/\left(\frac{dt}{dx}\right)^2=\left[2+2x\left(-\frac{1+4x^2}{x}\right)\right]/4x^2=-2$$

بذا تتحول المعادلة التفاضلية الى

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=10\,sint$$

$$i.e.,\quad y=Ae^{3t}+Be^{-t}+cost-2\,sint$$

$$=Ae^{3x^2}+Be^{-x^2}+\cos x^2-2\sin x^2$$

٨-٧ استبدال المتغير التابع

قد يؤدى إستبدال المتغير التابع $y=u(x)\,v$ بإختيار مناسب لدالة $u\ (x)$ إلى تبسيط المعادلة التفاضلية (الحل عن طريقة الإختزال للصيغة القياسية وكذلك معرفة أحد حلول الدالة المتممة هو من قبيل إستبدال المتغير التابع). سنوضح الطريقة بالأمثلة

مثال ١٠:

إستخدم التعويض $y=z/\sqrt{x}$ لحل المعادلة التفاضلية

$$4xy''+4xy'+(4x^2-1)\,y=0$$

نحول المعادلة المعطاه إلى معادلة فى z

$$y=z/\sqrt{x}\rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[z'-\frac{z}{2x}\right]\ ,\ y''=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[z''-\frac{z'}{x}+\frac{3}{4}\frac{z}{x^2}\right]$$

من ثم نحصل على

$$z''+z=0\rightarrow z=A\cos x+B\sin x$$

أى أن

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\ [A\cos x + B\sin x]$$

٧-Ω تغيير البارامترات (Variation of Parameters)

يمكن تبسيط المعادلة

$$Ly = (D^2 + P(x)\ D + Q(x))\ y = f(x) \quad a < x < b \tag{1}$$

بالتعويض $y = y_1 v$ حيث y_1 يحقق المعادلة المختزلة $Ly = 0$. إذا علم حلين مستقلين للمعادلة المختزلة y_1 , y_2 فإن التعويض

$$y = y_1\ v_1 + y_2\ v_2 \tag{2}$$

يؤدى إلى تبسيط أكثر كما سنوضح الآن. تتشابه طريقة تغيير البارامترات مع طريقة المعاملات غير المعينة فى ماعدا أن المجاهيل فى الحالة الأولى هى دوال v_1 , v_2 أكثر منها ثوابت.

نفرض أن $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وأن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ هو حل للمعادلة $Ly = 0$. نحصل على التعبير (2) بإستبدال البارامترات الثابتة c_1 , c_2 بدوال v_1 , v_2 ومن هنا سميت الطريقة طريقة تغيير البارامترات. عند التعويض بالدالة $y = v_1 y_1 + v_2 y_2$ فى المعادلة التفاضلية $Ly = f(x)$ نحصل على الشرط الواجب توافره على الدالتين v_1 , v_2 . حتى تمثل (2) الحل العام للمعادلة (1) . سوف نضع أيضا شرطا آخر على v_1 , v_2 يؤدى إلى تبسيط حسابهما.بالتفاضل

$$y' = (v_1 y_1' + v_2 y_2') + (v_1' y_1 + v_2' y_2)$$

حساب y'' سوف يبسط بشكل كبير إذا إنعدم القوس الثانى فى حساب y'

$$i.e. \quad v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \tag{3}$$

من ثم

$$y' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$$

$$y'' = v_1 y_1'' + v_2 y_2'' + v_1' y_1' + v_2' y_2'$$

التعويض فى المعادلة الأولى وإعادة الترتيب يؤدى إلى

$$v_1 (y_1'' + Py_1' + Qy_1) + v_2 (y_2'' + Py_2' + Qy_2) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x)$$

حيث أن y_1 , y_2 يحققان المعادلة المختزلة من ثم نحصل على

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \tag{4}$$

بحل المعادلتين (3) , (4) نحصل على

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} , \quad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

المحدد فى المقام هو رونسكين (Wronskian) الدالتين y_1 , y_2 ويرمز لـه بـالرمز $W(y_1 , y_2)$ (إذا كـانت قيمـة رونسكين مجموعة مـن الـدوال مساويا الصفر كانت الدوال مرتبطة خطيا وإلا فهى مستقلة خطيا). بالتكامل نحصل على v_1 , v_2 ومن ثم y

$$y = y_1 \int \frac{-f y_2}{W(y_1 , y_2)} dx + y_2 \int \frac{f y_1}{W(y_1 , y_2)} dx \qquad (5)$$

حيث أن ثوابت التكامل تضيف حدا بالهيئة $c_1 y_1 + c_2 y_2$ من ثم فإن الصيغة (5) تمثل الحل العام للمعادلة $Ly = f$

مثال ١١:

لحل المعادلة التفاضلية $(D^2 - 1) y = 2/(1 + e^x)$

نبدأ بحل المعادلة المختزلة $(D^2 - 1) y = 0$ وهو $y = A_1 e^{-x} + B_1 e^{+x}$

$$W(e^{-x} , e^x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{vmatrix} = 2$$

الحل العام يساوى

$$y = e^{-x} \int \frac{2 e^x}{2 (1 + e^x)} dx + e^x \int \frac{2 e^{-x}}{2 (1 + e^x)} dx$$

$$= e^{-x} [\ln (1 + e^x) + A] + e^x [- e^{-x} - x + \ln (1 + e^x) + B]$$

يمكن تعميم طريقة تغيير البارمترات التى ابتكرها لاجرانج لمعادلات خطية عامة.

$$[a_0 (x) D^n + a_1 (x) D^{n-1} + \ . \ . \ . \ + a_n (x)] y = f (x)$$

وسنعرض بإختصار كيف يتم هذا التعميم.

نفرض أن $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ . \ . \ + c_n y_n$ هو الحل المتمم للمعادلة المتجانسة المواكبة للمعادلة المعطاة. نفرض حلا عاما للمعادلة المعطاه بالهيئة

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n$$

حيث $v_i' s$ دوال مجهولة. نحصل على هذه المجاهيل من حل $(n - 1)$ من المعادلات الناتجة من مساواة الحدود التي تحتوى على الدوال $v_i' s$ والناتجة من الإشتقاق المتعاقب $(n - 1)$ من المرات بالصفر. ويكمل عدد المعادلات إلى n بإضافة المعادلة الناتجة بالتعويض عن المشتقات المختلفة في المعادلة التفاضلية. بعد عمل روتيني ولكنه مجهد نحصل على الصيغة

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \frac{W_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)} f(x)\, dx$$

حيث $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ هو الرونسكين بينما W_i هو المحدد الناتج من W بإستبدال العمود i بالعمود $[0, 0, \ldots, 0, 1]^t$

مثال ١٢:

أوجد حل المعادلة $(D^3 + D)\, y = \tan x$ بطريقة تغيير البارامترات.

الحل:

الدالة المتممة $y = A + B\cos x + C\sin x$ ،يمكن إيجاد الحل العام بالهيئة

$$y(x) = A(x) + B(x)\cos x + C(x)\sin x$$

وبفرض قيود مناسبة على مشتقات A, B, C

$$y' = B\sin x + C\cos x + A' + B'\cos x + C'\sin x$$

بفرض أن

$$A' + B' \cos x + C' \sin x = 0 \qquad (1)$$

$$y'' = -B \cos x - C \sin x - B' \sin x + C' \cos x$$

وبفرض أن

$$-B' \sin x + C' \cos x = 0 \qquad (2)$$

$$y''' = B \sin x - C \cos x - B' \cos x - C' \sin x$$

بتحقيق المعادلة المعطاه نحصل على

$$-B' \cos x - C' \sin x = \tan x \qquad (3)$$

بحل المعادلات (3) ,(2) ,(1) نحصل على

$$A' = \tan x \rightarrow A = A_1 + \ln \sec x$$

$$B' = -\sin x \rightarrow B = B_1 + \cos x$$

$$C' = -\sin x \tan x \rightarrow C = C_1 + \sin x - \ln (\sec x + \tan x)$$

بالتالى يكون الحل العام مساويا

$$y = A_1 + \ln \sec x + (B_1 + \cos x) \cos x$$

$$+ [C_1 + \sin x - \ln (\sec x + \tan x)] \sin x$$

تمارين

١ – حل المعادلات الآتية:

$(i) \quad y'' + (x+a)\,(y')^3$ $\qquad$ $(ii) \quad y'' = 2x(y')^2$

$y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$ $\qquad$ $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$

$(iii) \quad y' - 2y\,(1+y^2) = 0$ $\qquad$ $(iv) \quad (y-a)\,y'' + (y')^2 = 0$

$(v) \quad yy'' + (y')^2 = 2y^2$ $\qquad$ $(put\ y^2 = \omega)$

٢ – حل المعادلات التفاضلية

$(i) \quad y'' - x\,f(x)\,y' + f(x)\,y = 0$

$(ii) \quad y'' - f(x)\,y' + [\,f(x) - 1]\,y = 0$

٣ – وضح كيف توجد حل المعادلة التفاضلية

$$a(x)\,y'' + xy' - y = f(x)$$

٤ – إستخدم طريقة المعاملات غير المعينة لحل المعادلة

$$y'' + xy' + 2y = x^4$$

٥ – إستخدم التعويض $x = \cosh z$ لإثبات أن

$$(x^2 - 1)\,y'' + xy' = \frac{d^2y}{dz^2}$$

من ثم حل المعادلة

$$(x^2 - 1)\,y'' + xy' - y = x$$

٦ - أوجد قيمة n التي تجعل التعويض $y = zx^n$ يحول المعادلة

$$x^2y'' + 2x(x+2)y' + 2(x+1)^2 y = e^{-x}\cos x$$

إلى معادلة ذات معاملات ثابتة.

٧ - إستخدم التعويض $v = y\ln x$ لحل المعادلة

$$x^2 \ln x\, y'' + x(2 + 3\ln x)y' + (2 + \ln x)y = 1/x$$

٨ - إستخدم التعويض $z = \sqrt{x}$ لحل كل من المعادلتين

$$4xy'' + (1 - \sqrt{x})y' - 6y = e^{-2\sqrt{x}}$$

$$4xy'' + 2y' + y = 2x$$

٩ - إختزل رتبة المعادلة $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 \sin x$

مع العلم بأن $y = x^2$ تحقق المعادلة المتجانسة.

١٠ - بتحليل المؤثر أوجد حل المعادلات التفاضلية

(i) $3x^2y'' + (2 - 6x^2)y' - 4y = 0$

(ii) $xy'' + (x-1)y' - y = 0$

(iii) $xy'' + (x-1)y' - y = x^2$

(iv) $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$

١١ - إثبت أن $y = e^{x^2}$ تحقق كل من

$$xy'' - (6x^2+1)y' + 8x^3y = 0$$

$$y'' - 4xy' + (4x^2-2)y = 0$$

من ثم حل كل منهما.

١٢ - إثبت أن $y = \cos x/x$ تحقق المعادلة $xy'' + 2y' + xy = 0$

من ثم أوجد حلها العام.

١٣ – أستخدم التعويض $z = \sqrt{x}$ لحل المعادلة

$$4xy'' + 2(1 - \sqrt{x})\, y' - 6y = e^{-2\sqrt{x}}$$

١٤ – إثبت أن $y = 1/x$ تحقق

$$x(x+1)\, y'' + (2 - x^2)\, y' - (2 + x)\, y = 0$$

ثم أوجد الحل العام.

١٥ – إستخدم طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلات الآتية:

(i) $y'' + y = \sec^3 x$

(ii) $y'' - 2y' + y = e^x / (1 - x)$

(iii) $(1 - x)\, y'' + xy' - y = (1 - x)^2$

(iv) $(D^2 + 2D + 5)\, y = e^{-x} \sec 2x$

(v) $(D62 - 4D + 4)\, y = e^{2x}/x^3$

(vi) $(xD^2 - D)\, y) = 4/x$

(vii) $(x^3 D^3 + xD - 1)\, y = x \ln$

(viii) $(D^2 + 2D + 1)\, y = e^{-x} \ln x$

١٦ – إحذف حد الدرجة الثانية (إختزال الصيغة القياسية)

(i) $y'' + 4xy' + 4x^2 y = 0$

(ii) $y'' + \frac{2}{x} y' + n^2 y = 0$

(iii) $y'' - 2 \cot x\, y' + (1 + 2 \cot^2 x)\, y = 0$

(iv) $y'' - 2y' \tan x - (a^2 + 1)\, y = e^x \sec x$

(v) $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{\sin 2x}{x}$

١٧ – إستبدل المتغير المستقل

(i) $(1 + x^2)\, y'' + xy' + y = 1 + x^2$

(ii) $y'' - y' \cot x - y \sin^2 x = 0$

(iii) $x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0$

$(v)\quad y'' - y'\cot x - y\sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$

$(iv)\quad y''\cos x + y'\sin x + 4y\cos^3 x = 8\cos^5 x$

$(vi)\quad y'' + y'\tan x + y\cos^2 x = 2e^{\sin x}\cos^2 x$

١٨ – إستخدم التحويل المقابل لحل المعادلات التفاضلية الآتية

$(i)\quad x^2 y'' + (3x^2 + 4x)\, y' + (2x^2 + 6x + 2)\, y = 0 \qquad x^2 y = z$

$(ii)\quad x^2 y'' + (4x^2 + 6x)\, y' + (3x^2 + 12x + 6)\, y = 0 \qquad x^3 y = z$

$(iii)\quad y^2 - 2y' = \dfrac{x^2}{1 - x^2} \qquad y + z = x$

١٩ – إثبت أنه يمكن إيجاد ثابت n بحيث يحول التعويض $y = x^n z$ المعادلة

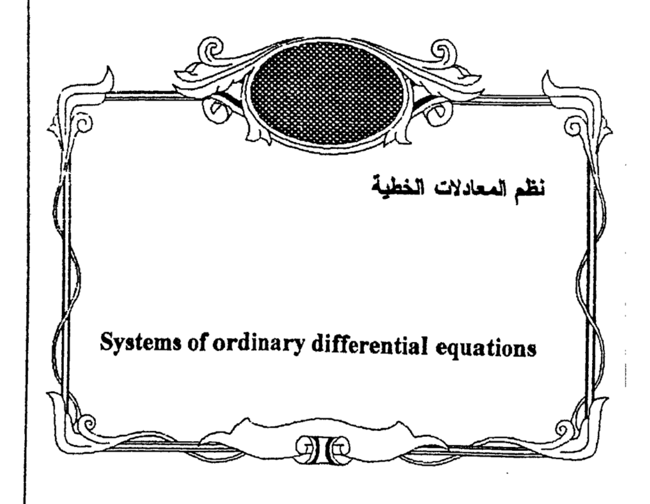
$$x^2 y'' + 4x(x+1)\, y' + (8x+2)\, y = \cos x$$

الى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة.

٢٠ حل المعادلات التفاضلية الآتية

$$\frac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \frac{1}{x^2}, \qquad xyy'' + xy'^2 = 2yy'$$

$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$$



نظم المعادلات الخطية

Systems of ordinary differential equations

نظم المعادلات الخطية

٨-١ نظم المعادلات التفاضلية الخطية.

تنشأ المعادلات التفاضلية الآنية في متغيرين تابعين أو أكثر ومرتبطة بمتغير مستقل واحد في مسائل عدة. منها على سبيل المثال، دراسة نظم ديناميكية ذات درجات حرية عديدة.

هناك أيضا سبب رياضي يحفز على دراسة نظم المعادلات وهو أنه يمكن إعتبار المعادلة التفاضلية من الرتبة n

$$y^{(n)} = f(x , y , y' , \ldots , y^{(n-1)})$$

نظام للمعادلات الآنية بأن نضع

$$y_1 = y \ , \ y_2 = y' , \ldots , y_n = y^{(n-1)}$$

من ثم

$$y_n' = f(x , y_1 , y_2 , \ldots , y_n)$$

ترتكز طريقة حل نظام معادلات تفاضلية على حذف المتغيرات التابعة جميعها (مقلدين مع الفارق قواعد الحذف المعمول بها عند حل نظام معادلات جبرية) عدا واحدا منها،من ثم نحصل على معادلة تفاضلية عادية. يجب التحقق من الحلول بالتعويض في المعادلات التفاضلية للتأكد من كون عدد الثوابت الإختيارية مناسبا.

سوف ندرس نظم المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة حيث تساعد النظريات التالية فى التعرف على إرتباطات الحلول والثوابت الإختيارية.

نعتبر نظام المعادلات التفاضلية الآتية

$$a_{11}(D)\,x_1 + a_{12}(D)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(D)\,x_n = f_1(t)$$

$$a_{21}(D)\,x_1 + a_{22}(D)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(D)\,x_n = f_2(t)$$

$$a_{n1}(D)\,x_1 + a_{n2}(D)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(D)\,x_n = f_n(t)$$

حيث $a_{ij}(D)$ كثيرة حدود فى المؤثر $D \equiv \frac{d}{dt}$

يمكن كتابة هذه المعادلات بالهيئة

$$\mathbf{A}(D)\,\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$$

حيث $\mathbf{A} = [\,a_{ij}(D)\,]$ مصفوفة المعاملات التفاضلية،

$$\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^t\ ,\ \mathbf{f} = [f_1\ f_2\ \ldots\ f_n]^t\ .$$

النظرية التالية تتعلق بعدد الثوابت الإختيارية التى تظهر فى حل نظام المعادلات المتجانسة $\mathbf{Ax} = 0$ المواكب للنظام $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

نظرية:

إذا لم يكن محدد مصفوفة المعاملات التفاضلية A مساويا تطبيقيا الصفر كان عدد الثوابت الإختيارية التى تظهر فى الحل العام مساويا درجة كثيرة الحدود فى D الناتجة من فك محدد A.إذا كان المحدد مساويا الصفر فإنه من الممكن ألا يوجد حل أو يوجد حل يحتوى على أى عدد من الثوابت الإختيارية.

من المفيد أن نتذكر أن أى دوال $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تكون مستقلة خطيا إذا كان رونسكين $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هذه الدوال لايساوى الصفر.

مثال ١:

لحل المعادلات الآتية

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + t - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y - 5t - 2$$

نكتب المعادلات بصيغة المؤثرات

$$(D-1)\,x - 2y = t - 1 \qquad (1)$$

$$-3x + (D-2)\,y = -5t - 2 \qquad (2)$$

بالتأثير على المعادلة الأولى بالمؤثر $(D-2)$ وضرب الثانية فى z نحصل على

$$(D-2)\,(D-1)\,x - 2\,(D-2)\,y = 3 - 2t$$

$$-6x + 2\,(D-2)\,y = -10t - 4$$

بالجمع

$$(D^2 - 3x - 4)\,x = -12t - 1$$

وحلها

$$x = Ae^{4t} + Be^{-t} + 3t - 2$$

بالتعويض فى المعادلة الأولى للحصول على y

$$y=\frac{3}{2}Ae^{4t}-Be^{-t}-2t+3$$

كالحال فى الجبر الخطى يمكن الأستعاضة عن حل نظام معادلات بنظام آخر مكافئ له بإجراء عمليات صفية كتبديل صفين، الضرب فى ثابت، التأثير بمؤثر أو تركيب خطى من هذه العمليات.

مثال ٢:

لحل نظام المعادلات

$$(D+1)x-2Dy=\cos t \quad , \quad Dx-(D-6)y=0$$

يمكن الإستعاضة عن المعادلة الأولى بمعادلة ناتجة من طرح المعادلتين. أى نحل النظام

$$x-(D+6)y=\cos t \quad , \quad Dx-(D-6)y=0$$

بالتأثير على المعادلة الأولى فى النظام الأخير بالمؤثر D ثم الطرح نحصل على

$$(D^2+5D+6)y=\sin t \Rightarrow y=Ae^{-2t}+Be^{-3t}$$
$$+\frac{1}{10}(\sin t-\cos t)$$

بالتعويض عن y للحصول على x

$$x=(D+6)y+\cos t=4Ae^{-2t}+3Be^{-3t}$$
$$+\frac{1}{10}(7\sin t+5\cos t)$$

فى المثال الآتى سوف نستخدم المحددات لإيجاد حل نظام معادلات تفاضلية .

مثـــال النظام

$$Dx - y = 2\cos t \qquad (1)$$

$$(D+2)\,x + (D+2)\,y = 3\sin t - \cos t \qquad (2)$$

يؤدى إلى

$$\begin{vmatrix} D & -1 \\ D+2 & D+2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2\cos t & -1 \\ 3\sin t - \cos t & D+2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} D & -1 \\ D+2 & D+2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D & 2\cos t \\ D+2 & 3\sin t - \cos t \end{vmatrix}$$

$$i.e. \quad (D^2 + 3D + 2)\,x = \sin t + 3\cos t$$

$$(D^2 + 3D + 2)\,y = 3\sin t - \cos t$$

$$x = A e^{-t} + B e^{-2t} + \sin t$$

$$y = A_1 e^{-t} + B_1 e^{-2t} - \cos t$$

لإيجاد العلاقة بين الثوابت $A\,,\,B\,,\,A_1\,,\,B_1$ نعوض بالحلول فى أحد المعادلات التفاضلية ولتكن الأولى

$$(-A - A_1)\,e^{-t} - (2B + B_1)\,e^{-2t} + 2\cos t = 2\cos t$$

$$\rightarrow A_1 = -A \quad , \quad B_1 = -2B$$

من ثم

$$x = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \sin t$$

$$y = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t} - \cos t$$

٢-٨ نظم المعادلات من الرتبة الأولى

تلعب المصفوفات دورا مؤثرا عند حل نظام خطى للمعادلات من الرتبة الأولى:

$$x_i' = a_{i1}(t)\, x_1 + a_{i2}(t)\, x_2 + \dots + a_{in}(t)\, x_n + f_i(t) \qquad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

حيث جميع الدوال $a_{ij}(t)$ متصلة. يتكون حل النظام (1) والذى يمكن كتابته بلغة المصفوفات.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\, \mathbf{x} + f(t).$$

كالمعتاد من الدالة المتممة وهى حل للنظام المتجانس المواكب

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\, \mathbf{x} \qquad (2)$$

مضافا إليه حل خاص للمعادلة (1)

كالمعتاد إذا كان $x_1, x_2, \dots, x_m$ تحقق المعادلة (2) فإن التركيب الخطى $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m$ يحقق أيضا

المعـادلة المتجانسة لأى ثوابت $\{c_i\}$. يتكون الحل المتمم لنظام متجانس من الرتبة الأولى فى n من المجاهيل من تركيب خطى من n من متجهات الحل مستقلة خطيا (رونسكين هذه المتجهات لا يساوى الصفر) بالهيئة

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c = [x_1 x_2 \dots x_n] c = \mathbf{X} c$$

تسمى المصفوفة x المصفوفة الأساسية (Fundamental matrix) لنظام المعادلات الخطية المعطى وتتكون أعمدتها من الحلول المستقلة خطيا للمعادلة المتجانسة ومشتقتها 'x تساوى

$$\mathbf{X}' = [x_1' x_2' \dots x_n'] = [A x_1\ A x_2 \dots A x_n] = A X .$$

تتركز صعوبة حل نظام للمعـادلات من الرتبة الأولى فى إيجاد الدالة المتممة. إيجاد الحل الخاص لايمثل صعوبة كبيرة إذ يمكن إيجاده بعد إيجـــاد الحـــل المتمم بطـريقة تغيير البـارامترات وذلك بإفتراض حـل بالهيئة $\mathbf{x}_p = \mathbf{X} u$

حيث $u = [u_{i1}]$ مصفوفة عمودية مكونة مـن دوال مـن t عوضـا عن الدالة المتممة xc حيث c مصفوفة عمودية مكونة من ثوابت إختيارية.

بالتعويض فى المعادلة (1)

$$x_p = (Xu)' = X'u + Xu' = AXu + xu' = AXu + f$$

$$\Rightarrow Xu' = f$$

$$\Rightarrow u = \int X^{-1} f\, dt$$

تعامل المصفوفة الأساسية جبريا بإيجاد معكوسها (أعمدتها مستقلة خطيا) ثم إجـراء التكـامل عليهـا وذلك بـإجراء التكـامل علـى كـل حـد مـن

حدودها مع حذف جميع ثوابت التكامل للحصول على حل خاص

$$x_p = X \int X^{-1} f \, dt$$

مثال ٣:

لحل نظام المعادلات

$$x_1' = x_1 + 3x_2 + 3\sqrt{t}\, e^{-2t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$x_2' = 3x_1 + x_2 - 3\sqrt{t}\, e^{-2t}$$

نوجد أولا حل المعادلة المتجانسة

$$(D-1)\, x_1 + 3x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$-3x_1 + (D-1)\, x_2 = 0$$

بحذف x_2 نحصل على

$$[(D-1)^2 - 9]\, x_1 = 0 \quad \rightarrow x_1 = A\, e^{4t} + B\, e^{-2t}$$

من ثم بالتعويض في أحد المعادلتين (2) نحصل على

$$x_2 = A\, e^{4t} - B\, e^{-2t}$$

المصفوفة الأساسية

$$X = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad |X| = -2\, e^{2t}$$

$$X^{-1} f = -\frac{1}{2} e^{-2t}\begin{bmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} . 3\sqrt{t}\, e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} f = 3\sqrt{t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_p = X\int X^{-1}\, dt = 3\begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\, t^{3/2} \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t^{3/2}\, e^{-2t}$$

الحل العام

$$x(t) = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + B\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t^{3/2}\, e^{-2t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 1 \quad , \quad B = 0$$

من ثم

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t^{3/2}\, e^{-2t}$$

٨-٣ نظم المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

(Linear differential systems with conistant coeffiicents)

تعالج نظم المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة بطريقة مشابهة لطرق حل معادلات تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة.

لحل النظام

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \qquad (1)$$

حيث $\mathbf{A}$ مصفوفة ثابتة، نبدأ بحل النظام المتجانس

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad (2)$$

وذلك بفرض حل بالهيئة

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}\, e^{mt}$$

حيث $\mathbf{k}$ متجه ثابت بينما m عدد قياسي بالتعويض في (2)

$$m\mathbf{k}\, e^{mt} = \mathbf{A}\mathbf{k}\, e^{mt} \rightarrow (\mathbf{A} - m\mathbf{I})\,\mathbf{k} = 0$$

وعليه فإن m يجب أن يكون جذرا مميزا للمصفوفة $\mathbf{A}$ بينما $\mathbf{k}$ متجه مميز مناظر للجذر المميز m. يمكن للجذور المميزة أن تكون:

١ – حقيقية مختلفة

٢ – حقيقية وبعضها مكرر

٣ – بعضها تخيلي

في الحالة الأولى يمكن الحصول على الحل المتمم مباشرة. في حالة وجود جذر m مكرر r من المرات فإنه يمكن إيجاد متجه مميز مناظر لهذا الجذر وليكن $\mathbf{k}$. يمكن الحصول على بقية الحلول المناظرة للجذر المميز m بطريقة تغيير البارامترات وذلك بفرض حل بالهيئة $\mathbf{u}\, e^{mt}$ بدلا من $\mathbf{k}\, e^{mt}$ حيث صفوف $\mathbf{u}$ كثيرات حدود من درجة $(r-1)$

في حالة الجذور المركبة يمكن يمكن بوجه عام إيجاد حلول لها مثل الحالة الأولى ويمكن تحويل هذه الحلول إلى حلول بدلالة دوال حقيقية كما حدث في حالة المعادلات التفاضلية العادية.

سوف نوضح الأحوال الثلاث السابقة بأمثلة

مثال ٤:

لحل نظام المعادلات

$$x' + 2x - 3y = 0 \qquad y' - 3x + 2y = 0$$

نوجد الجذور المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow 0 = |A - mI| = \begin{vmatrix} -2-m & 3 \\ 3 & -2-m \end{vmatrix} = (m+2)^2 - 9$$

$$\rightarrow m = 1, -5$$

الجـذور حقيقيـــة مخـتلفة ومـن ثم الحـــالة الأولـى. متجـه مميز مناظر للجذر $m = 1$

$$0 = [A - mI]\, X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} X \rightarrow X = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

متجه مميز مناظر للجذر $m = -5$

$$0 = [A - 5I]\, X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} X \rightarrow X = b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

الحل المطلوب

$$X = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

مثال ٥:

لحل نظام المعادلات

$$x' = -5x + 2y \quad , \quad y' = -2x - y$$

نوجد أولا الجذور المميزة

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \; 0 = |A - mI| = \begin{vmatrix} -5-m & 2 \\ -2 & -1-1m \end{vmatrix}$$

$$i.e., \quad m = -3 , -3$$

متجه مميز مناظر للجذر m = -3

$$0 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} X \rightarrow X = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثم حل أول

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

لفرض الحل الآخر المناظر للجذر المكرر m = -3 بالهيئة

$$\omega = \begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix} e^{-3t}$$

بالتعويض فى المعادلة المتجانسة

$$\omega' = A\omega \rightarrow \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} e^{-3t} - 3 \begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+bt \\ c+dt \end{bmatrix} e^{-3t}$$

$$-5a + 2c = b - 3a \; , \; -2a - c = d - 3c \; , \; -5b + 2d = -3b \; . \; -2b - d = -3d$$

$$\Rightarrow d = b \quad , \quad c = \frac{b}{2} + a$$

$$\omega = \begin{bmatrix} a + bt \\ a + \frac{1}{2} bt \end{bmatrix} e^{-3t}$$

بأخذ $a = 0 , b = 2$ نحصل على حل ثان x_2

الحل العام

$$X = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + B \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} e^{-3t}$$

مثال ٦:

لحل نظام المعادلات

$$x' - y = 0 \qquad y' + x = 0$$

نوجد الجذور المميزه للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - mI| = 0 = \begin{vmatrix} -m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow m = \pm i$$

متجه مميز مناظر للجذر i

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} X = 0 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

بالمثل متجه مميز مناظر للجذر i -

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

من ثم الحل العام

$$y = A \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{it} + B \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-it}$$

يمكن كتابة الحل

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{it}$$

كالآتى

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} (cost + i\, sint) = \begin{bmatrix} cost + i\, sint \\ sint - i\, cost \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos t \\ \sin t \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{vmatrix}$$

كلا المتجهين المستقلين

$$\begin{vmatrix} \cos t \\ \sin t \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{vmatrix} \begin{matrix} T \\ T \end{matrix} \Bigg]$$

يحقق نظام المعادلات التفاضلية المعطى وعليه يمكن كتابة الحل بدلالة دوال حقيقية بالهيئة

$$\mathbf{x} = a \begin{vmatrix} \cos t \\ \sin t \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{vmatrix}$$

تمارين

حل نظم المعادلات الآتية

1) $\dot{x}+2x+y=0$, $\dot{y}+x+2y=0$ $\quad X(0)=1$, $y(0)=0$

2) $\dot{x}=4x-2y+e^{t}$, $\dot{y}=6x-3y$

3) $\dot{y}-2x=cost$, $\dot{x}+2y=-\sin 2t$

4) $\dot{x}+\dot{y}+2x+y=e^{-3t}$, $\dot{y}+5x+3y=5e^{-2t}$

$X(0)=-1$, $y(0)=4$

5) $\dot{x}+x-y=te^{t}$, $2y-\dot{x}+\dot{y}=e^{t}$

6) $2\dot{x}+\dot{y}=2t-X-2y$, $\dot{x}+\dot{y}=3t+x-3y$

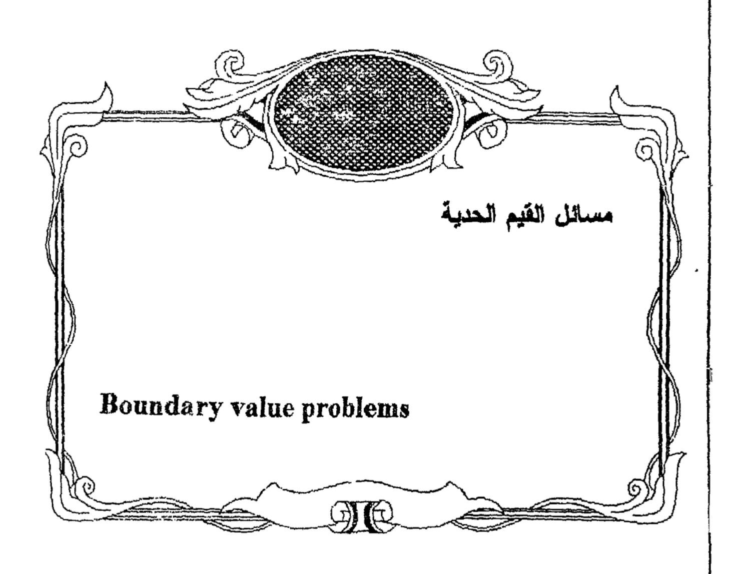
7) $2\dot{x}-\dot{y}+3x=2t$ $\quad \dot{x}+2\dot{y}-2x-y=t^{2}-t$

$x(0)=y(0)=1$

8) $\dot{x}+2y+\sin t=0$, $\dot{y}-2x-\cos t=0$

9) $\dot{x}=x+3y$, $\dot{y}=3x+y$

10) $t\dot{x}+y=0$ $\quad t\dot{y}+x=0$


مسائل القيم الحدية
Boundary value problems

مسائل القيم الحدية

عنـد التعرض لحلول معادلات تفاضلية تعطى فيها شروط إضافية عند نقطة واحدة تسمى مثل هذه المعادلات بمســائل القيم الأولية - (Initial value Problems) أما إذا أعطيت القيم الإضافية عند نقطتين أو أكثر سميت بمسائل القيم الحدية.

دراسة مسائل القيم الحدية سوف تقودنا إلى مفاهيم إما أن يكون قد سبق دراستها أو مفاهيم جديدة مثل: القيم والدوال الذاتية، الدوال المتعامدة، مفكوك فورير، مسائل شترم ولوافى، صيغة جرين.

تغطية دراسة هذه المفاهيم وغيرها بدقة لن يتسع لها الحيز المتاح من هذا الكتاب، لذا في حالات عديدة سوف نعرض نظريات بدون إثبات ولكن مصحوبة بأمثلة وإيضاحات تساعد فى فهم وتقييم وإستعمال هذه النظريات.

١-٩ مسائل القيم الحدية المتجانسة

(Homogeneous Boundary - Value Problems)

نعتبر مسألة القيم الحدية المتجانسة

$$Ly = 0 \qquad a \le x \le b$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \qquad (1)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

حيث L هو المؤثر التفاضلي

$$L = a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x) \qquad a_0(x) \neq 0 \tag{2}$$

بينما a_0 , a_1 , a_2 دوال متصـــلة في الفترة $[a , b]$. ســـوف نفترض أن α_1 , β_1 ليسا في آن واحد أصفارا وكذلك α_2 , β_2 . تسمى الشـروط الحدية في (1) خطية ومتجانسة لأنه إذا كانت كل من $u(x) , v(x)$ تحققان هذه الشروط فإن أي تركيب خطي منها أيضا يحقق هذه الشروط. تسمى أيضا هذه الشروط الحدية غير مختلطه لأن كل شرط حدى يحتوى على قيم y , y' عند نقطة واحدة فقط.

مسـألة القيمـة الحديـة المتجانسـة (1) لهـا دائمـا الحـل الصفـرى. سنبحث شرط وجود حل غير الحل الصفرى. نفرض أن $y_1(x) , y_2(x)$ هما حلان مستقلان للمعادلة $Ly = 0$ يمكن كتابة الحل العام بالهيئة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{3}$$

تتحقق الشروط الحدية إذا كان

$$\alpha_1 y(a) - \beta_1 y'(a) = 0 \tag{4}$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

بإستعمال (3) نحصل على

$$\alpha_1 \left[c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a)\right] + \beta_1 \left[c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a)\right] = 0$$

$$\alpha_2 \left[c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b)\right] + \beta_2 \left[c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b)\right] = 0 \tag{5}$$

بتجميع معاملات c_2 ، c_1 نحصل على

$$c_1 B_a(y_1) + c_2 B_a(y_2) = 0$$

$$c_1 B_b(y_1) + c_2 B_b(y_2) = 0 \qquad (6)$$

حيث إستخدمنا الإختصار

$$B_a(u) = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a)$$

$$B_b(u) = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) \qquad (7)$$

للمعادلات الجبرية (6) حل غير الحل الصفرى فى c_2 ، c_1 إذا كان

$$\begin{vmatrix} B_a(y_1) & B_a(y_2) \\ B_b(y_1) & B_b(y_2) \end{vmatrix} = 0$$

من ثم فأن الحلول الغير تافهة لمسألة القيمة الحدية (1) تتواجد إذا وفقط إذا تحققت (8)

مثال ١:

لإيجاد حل المعادلة

$$y'' + \pi^2 y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

نوجد أولا الحل العام للمعادلة التفاضلية و

$$y = A \cos \pi x + B \sin \pi x$$

$$y(0) = 0 = A \quad , \quad y(1) = 0 = -A$$

من ثم فأن $A = 0$ بينما B ثـابت إختيـارى وبالتـالى فـإن حـل مسـألة القيمـة الحدية هو

$$y = B \sin \pi x$$

مثال ٢:

مسألة القيم الحدية

$$y'' + \pi^2 y = 0 \, , \, y(0) = 0 \quad , \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

حلها العام هو

$$y = A \cos \pi x + B \sin \pi x$$

وشروطها الحدية تودى إلى

$$0 = A \quad , \quad 0 = B$$

ومن ثم فإن حلها الوحيد هو $y = 0$.

٢–٩ مسائل القيم الذاتية (Eigenvalue Problems)

كثير من مسـائل القيـم الحديـة المتجانسـة التـى تظهـر فـى مسـائل فيزيائية تحتوى على بارامتر. نوع هام من هذه الأنواع هو

$$Ly = \lambda y \qquad a \le x \le b$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \qquad (9)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

حيث λ بارامتر بينما L هو المؤثر

$$L = a_0(x)\, D^2 + a_1(x)\, D + a_2(x) \qquad a_0 \neq 0 \tag{10}$$

وفيه a_0 , a_1 , a_2 دوال متصلة.

الحل التافه $y = 0$ هو أحد الحلول لأى قيمة من قيم λ. إذا وجد حل غير تافه عند قيمة $\lambda = \lambda_1$ سميت هذه القيمة قيمة ذاتية (an eigenvalue) لمسألة القيمة الحدية والحل المناظر y_i يسمى دالة ذاتية (an eigenfunction).

عندما يؤثر المؤثر L على دالة فإنه يغيرها جوهريا ولكن عندما يؤثر على دالة ذاتية فإن ناتج التأثير هو ضرب الدالة الذاتية فى ثابت.

لتوضيح إستخدام الدوال الذاتية نعتبر المعادلة الغير متجانسة

$$Ly = f(x) \;,\; \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \;,\; \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \tag{11}$$

حيث L هو المؤثر (10). نفرض أن $y_1 , y_2 , \dots , y_n$ هى الدوال المميزة المناظرة للقيم المميزة $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n$ للمعادلة $Ly = \lambda y$ أى أن

$$Ly_i = \lambda_i y_i \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , n \tag{12}$$

حيث $y_i(x)$ تحقق الشروط الحدية. إذا إفترضنا أن f(x) تركيب خطى من الدوال الذاتية

$$f(x) = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n \tag{13}$$

يمكن إيجاد حل المعادلة التفاضلية

$$Ly = A_1 y_1 + \dots + A_n y_n \tag{14}$$

بفرض أنه على الهيئة

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \qquad (15)$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$L(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) = \lambda_1 c_1 y_1 + \dots + \lambda_n c_n y_n$$

$$= A_1 y_1 + \dots + A_n y_n$$

$$i.e. \qquad c_1 = \frac{A_1}{\lambda_1}, \quad c_2 = \frac{A_2}{\lambda_2}, \quad \dots c_n = \frac{A_n}{\lambda_n}$$

بإفتراض عدم إنعدام أى قيمة ذاتية.

مثال ٣:

أوجد القيم والدوال المميزة لمسألة القيمة الحدية

$$(xy')' + \frac{\lambda y}{x} = 0 \qquad y(1) = y(e^{\pi}) = 0$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة كالآتى

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \rightarrow [\theta(\theta - 1) + \theta + \lambda] y = 0$$

حيث

$$\theta = \frac{d}{dt}, \quad x = e^t$$

$$or \qquad (\theta^2 + \lambda) y = 0$$

حل المعادلة التفاضلية الأخيرة يتوقف على قيم λ. نعتبر $\lambda = 0$

$$y = A + Bt = A + B \ln x$$

$$y(1) = y(e^{\pi}) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad , \quad A + B\pi = 0 \Rightarrow A = B = 0$$

ويكون $y = 0$ هو الحل الوحيد ومن ثم فإن $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية. نعتبر $\lambda < 0$. الحل في هذه الحالة يساوى

$$y = \frac{A}{x^{\sqrt{-\lambda}}} + Bx^{\sqrt{-\lambda}}$$

$$y(1) = y(e^{\pi}) = 0 \Rightarrow A + B = 0 = Ae^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + Be^{\sqrt{-\lambda}\pi} \Rightarrow A = B = 0$$

ويكون $y = 0$ هو الحل الوحيد ومن ثم فإن $\lambda < 0$ ليست قيمة ذاتية. نعتبر $\lambda > 0$. الحل يساوى

$$y = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

$$y(1) = y(e^{\pi}) = 0 \Rightarrow A = 0 = A\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$= B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

إذا إخترنا λ بحيث

$$\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = \sin n\pi = 0 \Rightarrow \lambda = n^2 \quad n = 1, 2, \ldots$$

حصل على القيم الذاتية لمسألة القيم الحدية وهى

$$\lambda_n = 1, 2^2, 3^2 \ldots$$

٩-٣ الدوال المتعامدة (Onthogonal Functions)

يعرف حاصل الضرب الداخلى لدالتين متصلتين f, g فى الفترة $[a, b]$ والذى سنرمز له بالرمز $\langle f, g \rangle$ كالآتى:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

لحاصل الضرب الداخلى الخواص الآتية:

$$\langle f , g\rangle = \langle g , f\rangle$$

$$\langle \alpha f + \beta g , h\rangle = \alpha \langle f , h\rangle + \beta \langle g , h\rangle$$

$$\langle f , f\rangle = 0 \leftrightarrow f = 0$$

$$\langle f , f\rangle > 0 \; if \; f \neq 0$$

هذه الخواص هى نفس خواص حاصل الضرب الداخلى الذى يجرى على المتجهات العادية. مطابقة لما يجرى على المتجهات يعرف قياس (Norm) دالة f والذى يرمز له بالرمز $\|f\|$ كالآتى:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f , f\rangle}$$

$$= \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}$$

إذا كان $\|f\| = 1$ نقول أن الدالة f معددة (Normalized).

مفهوم تعامد متجهات يمكن تعميمه على الدوال نقول أن الدالتين f, g متعامدتين فى الفترة [a , b] إذا كان

$$\langle f , g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

مثال ٤:

الدالتان $x , \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ متعامدتان فى الفترة $(-1 , 1)$

$$\langle x , \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\rangle = \int_{-1}^{1} x . \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\, dx = 0$$

نقول أن عائلة الدوال $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ متعامدة فى الفترة $[a, b]$ إذا كان

$$\int_a^b \phi_i(x)\, \phi_j(x)\; dx = 0 \qquad i \neq j$$

إذا كان قياس كل دالة من عائلة دوال متعامدة تساوى الوحدة سميت العائلة متعامدة (Orthonormal).

مثال ٥:

عائلة الدوال

$$\left\{\frac{1}{a}\,,\; \frac{2}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\,,\; \frac{2}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}\,,\; \ldots\right\}$$

متعامدة فى الفترة $[0, a]$

٤–٩ دوال وزن (Weight Functions)

نقول أن الدالتين المتصلتين f(x) , g(x) متعامدتان فى الفترة [a , b] بالنسبة لدالة وزن متصلة $\omega(x)$ إذا كان

$$\int_a^b \omega(x)\; f(x)\; g(x)\; dx = 0$$

بإفتراض أن $\omega(x) \geq 0$ فى الفترة [a , b] وأنها لا تساوى الصفر تطابقيا يمكن أن نعتبر التعريف السابق هو تعريف لحاصل ضرب داخلى جديد نرمز له بالرمز

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b \omega(x)\; f(x)\; g(x)\; dx$$

حاصل الضرب الداخلى الجديد له نفس خواص حاصل الضرب الداخلى السابق.

نفرض أن $f(x)$, $g(x)$ دوال مركبة القيم من متغير حقيقى. يعرف حاصل الضرب الداخلى المركب كالآتى:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

حيث $\overline{g(x)}$ ترمز لمرافق $g(x)$. للضرب الداخلى المركب الخواص الآتية:

$$\langle f, f\rangle > 0 \quad f \neq 0$$

$$\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha \langle f, h\rangle + \beta \langle g, h\rangle$$

حيث α , β ثوابت مركبة

مثال ٦:

عائلة الدوال $n = , 0 , \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\{e^{inx}\}$ متعامدة فى الفترة $0 \leq x \leq 2\pi$

تعريف:

عائلة دوال (أو متجهات) متعامدة $\{\phi_i\}$ تكون تامة (Complete) إذا كان لأى دالة f من فراغ هذه المتجهات

$$\|f\|^2 = \Sigma \langle f, \phi_i\rangle^2$$

نفرض أن $\{\phi_i\}$ عائلة دوال متعامدة وتامة فى الفترة [a , b] وأن f دالة إختيارية متصلة ومعرفة على [a , b]. يمكن كتابة f كالآتى:

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\phi_i(x)$$

يمكن الحصول على المعاملات $\{\phi_i\}$ بضرب الطرفين فى ϕ_i ثم التكامل

$$\int_a^b f(x)\,\phi_j(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_a^b \phi_i\phi_j\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\delta_{ij}$$

حيث δ_{ij} رمز كرونكر دلتا (Kronecker delta)

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

$$\text{i.e.}\qquad \alpha_j=\langle f,\phi_j\rangle=\int_a^b f(x)\,\phi_j(x)\,dx$$

أى أن α_j هو حاصل الضرب الداخلى للدالتين $f(x)\,,\phi_j(x)$

يسمى المفكوك

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\phi_i(x)$$

أحيانا بتعميم متسلسلة فورير (Generalized Fourier series).

بينما يسمى المعامل

$$\alpha_i=\int_a^b f(x)\,\phi_i(x)\,dx$$

معامل فورير المعمم

٥-٩ مسألة شترم ولوافى (The Sturm - Liouville Problem)

تحت شروط خاصة تكون الدوال المميزة لمسألة قيم مميزة مجموعة متعامدة. على سبيل المثال الدوال المميزة لمسألة القيم الحدية

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = y(a) = 0 \qquad (16)$$

هى

$$\{\sin \frac{n\pi x}{a}\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

وهى مجموعة متعامدة فى الفترة [o, a]. سوف ندرس بعضا من فصول مسائل القيم المميزة التى دوالها المميزة متعامدة

يقال أن مؤثر L مرافق ذاتى (Self - adjoint) إذا كان بالهيئة

$$Ly = (P(x)\, y')' + q(x)\, y \qquad p(x) \neq 0 \qquad (17)$$

حيث $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ دوال متصلة فى فترة ما [a , b].

نعتبر مسألة القيم الذاتية بشروط حدية غير مختلطة

$$L(y) + \lambda \omega(x) y = 0 \qquad a \leq x \leq b$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0 \qquad (18)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

حيث $\omega(x) \geq 0$ دالة متصلة لا تنعدم تطابقيا بينما L مؤثر مرافق ذاتى.

تسمى المسألة (18) مسألة شترم – لوافى.

نظرية:

الدوال الذاتية للمسألة (18) المناظرة لقيم ذاتية مختلفة تكون متعامدة بالنسبة لدالة الوزن $\omega(x)$,

الإثبات:

نفرض أن y_n , y_m هي دوال مميزة مناظرة للقيم المميزة λ_n , λ_m

$$i.e. \quad L(y_n) + \lambda_n \omega(x)\, y_n = 0$$

$$L(y_m) + \lambda_m \omega(x)\, y_m = 0$$

بضرب المعادلة الأولى في $-y_m$ والثانية في y_n والجمع

$$y_n L(y_m) - y_m L(y_n) = (\lambda_n - \lambda_m)\, \omega(x)\, y_n\, y_m$$

بتكامل الطرفين

$$\int_a^b [y_n L(y_m) - y_m L(y_n)]\, dx = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \omega\, y_n y_m\, dx \quad (19)$$

ولكن

$$\int_a^b [y_n L(y_m) - y_n L(y_n)]\, dx = \int_a^b [y_n\, (Py_m')' - y_m\, (py_n')']\, dx$$

$$= \int_a^b [p(x)\, (y_n y_m' - y_m y_n')]'\, dx = [p(x)\, (y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b \quad (20)$$

تعرف المعادلة (20) بإسم متطابقة لاجرانج (وهي لا تتحقق حالة كون L مؤثر غير مرافق ذاتي). بإستخدام الشروط الحدية نحصل على

$$[p(x)\, (y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b = 0$$

من ثم

$$\int_a^b \omega(x)\, y_n y_m\, dx = 0$$

سنعرض الآن بعض تعميمات النظرية السابقة.

ظروف حدية دورية (Periodic boundary conditions)

نناقش حل مسألة القيم الحدية (3) بإستبدال الشروط الحدية بالشروط الدورية (المختلطة)

$$1- \quad y(a) = y(b) \qquad 2- \quad y'(a) = y'(b)$$

إذا إفترضنا بالإضافة إلى هذا أن $p(a) = p(b)$ تحققت النظرية السابقة بنفس الإثبات وحصلنا على تعامد الدوال المميزة المناظرة لقيم مميزة مختلفة بالنسبة لدالة الوزن $\omega(x)$.

نقط حدية شاذة (Singular end Points)

إذا كانت $p(a) = 0$ فى مسألة شترم – لوافى تحقق إثبات النظرية مع إلغاء الشرط الأول من (18) بشرط ألا يؤول $y(x)$ إلى ∞ بإقتراب x من a. من ثم مع حالة $p(a) = 0$ نتطلب أن يكون الحل محدودا عند $x = a$. مع هذا الشرط نحصل أيضا على تعامد الدوال المميزة المناظرة لقيم مميزة.

بنفس الطريقة إذا كان $p(b) = 0$ أمكن إستبدال الشرط الثانى من (3) بأن تكون $y(x)$ محدودة عند $x = b$.

إذا كانت $p(a) = p(b) = 0$ أمكن حذف شرطى (18) وإستبدالهما بالشرط أن تكون $y(x)$ دالة محدودة عند كل من $x = b$, $x = a$.

٦ – ٩ نظريات عن القيم والدوال المميزة

سوف نعرض بدون إثبات لنظريات تتعلق بالقيم والدوال المميزة لمسألة شترم – لوافى

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda \ (x)]\, y = 0 \qquad a \le x \le b$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \ne 0$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \ne 0$$

حيث $p(x)\ ,\ p'(x)\ ,\ q(x)\ ,\ \omega(x)$ دوال متصلة في الفترة $[a\ ,\ b]$

وحيث $p(x) \ne 0\ ,\ \omega(x) \equiv 0\ ,\ \omega(x) \ge 0$

نظرية:

لمسألة شترم – لوافى السابقة عدد لانهائى من القيم المميزة الحقيقية وغير السالبة. يمكن ترتيب القيم المميزة تصاعديا

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

بحيث $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$

نظرية:

يواكب كل قيمة مميزة λ_1 دالة مميزة واحدة ϕ_1 (في حدود الضرب في ثابت).

نظرية:

أعائلة الدوال المميزة $\{\phi_1\ ,\ \phi_2\ ,\ \ldots\}$ تكون عائلة كاملة ومتعامدة في الفترة $[a\ ,\ b]$ بدالة ورن $\omega(x)$.

نظرية:

أى دالـة ناعمـة فـى مقاطع f(x) فـى الفـترة $a \le x \le b$ يمكـن كتابتها على هيئة متسلسلة فورير متقاربـة بأنتظـام إلـى الدالـة f(x) عند أى نقطة فى الفترة المفتوحة $a < x < b$ تكون عندها f(x) متصلة. عند النقط التى لا تكون عندها f(x) متصلة فإن المتسلسلة تتقارب إلى القيمة المتوسطة النهايتين اليمنى واليسرى للدالة f(x). أى أنه إذا كانت x نقطة عدم إتصال للدالة f(x) فى الفترة a < x < b فإن

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_n\phi_n(x) \qquad a<x<b$$

حيث

$$\gamma_n=\frac{\int_a^b \omega(x)\, f(x)\, \phi_n(x)\, dx}{\int_a^b \omega(x)\, \phi_n^2(x)\, dx}$$

٧-٩ مسائل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة

(Nonhomogeneous boundary - value problems)

نعتبر المسألة الحدية

$$Ly=f(x) \qquad a\le x\le b$$

$$B_1(y(a)):\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0 \quad \alpha_1^2+\beta_1^2\ne 0$$

$$B_2(y(b)):\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \quad \alpha_2^2+\beta_2^2\ne \qquad (21)$$

حيث f(x) دالة متصلة بينما L هو المؤثر

$$L\equiv p(x)\,D^2+q(x)\,D+r(x) \qquad p(x)\ne 0$$

وحيث p , q , r دوال متصلة فى الفترة $[a , b]$

نفرض أن الحل العام للمعادلة $Ly = f$ هو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p \qquad (22)$$

حيث y_1 ، y_2 هما حلان مستقلان للمعادلة $Ly = 0$ بينما y_p هو حل خاص للمعادلة $Ly = f$. من طريقة تغيير البارامترات يمكن كتابة صيغة مناسبة للحل y_p كالآتى:

$$y_p = \int_a^x \frac{y_1(t)\, y_2(x) - y_1(x)\, y_2(t)}{W[y_1(t)\ ,\ y_2(t)]} \ \frac{f(t)}{p(t)}\, dt \qquad (23)$$

حيث

$$W[y_1(t)\ ,\ y_2(t)] = W(t)$$

هو رونسكين $y_1(t)$ ، $y_2(t)$. إذا كان المؤثر L مرافق ذاتى $(q = p')$ كان $p(t)\, W(t)$ مقدارا ثابتا.

لكى تتحق الشروط الحدية فإن

$$c_1 B_1(y_1) + c_2 B_1(y_2) + B_1(y_p) = 0$$

$$c_1 B_2(y_1) + c_2 B_2(y_2) + B_2(y_p) = 0 \qquad (24)$$

إذا أمكن إيجاد c_1 ، c_2 تحققان المعادلتين السابقتين كان للمسألة حل.

يكون للمسألة حل وحيد إذا وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} B_1(y_1) & B_1(y_2) \\ B_2(y_1) & B_2(y_2) \end{vmatrix} \neq 0$$

أى إذا وفقط إذا كان حل المعادلتين المتجانستين

$$c_1 B_1 (y_1) + c_2 B_1 (y_2) = 0$$

$$c_1 B_2 (y_1) + c_2 B_2 (y_2) = 0 \qquad (25)$$

هو الحل الصفرى. أى إذا كان لمسألة القيم الحدية المتجانسة

$$L(y) = 0 \quad , \quad B_1 (y(a)) = B_2 (y(b)) = 0$$

الحل الصفرى فقط.

من ثم نحصل على

نظرية:

يكون لمسألة القيم الحدية $Ly = f,\ 0 = B_1 (y(a)) = B_2 (y(b))$

حل وحيد إذا وفقط إذا لم يكن لمسألة القيم الحدية المناظرة

$$Ly = 0 \quad B_1 (y(a)) = 0 = B_2 y(b))$$

حل غير الحل الصفرى.

سوف نحصل على صيغة مدهشة عندما لا يكون للمعادلة المتجانسة غير الحل الصفرى. من العلاقة (23) نرى أن

$$y(a) = y'(a) = 0 \rightarrow B_1 y_p (a) = 0 \qquad (26)$$

$$B_2 y_p (b) = \alpha_2 \int_a^b \frac{y_1(t)\, y_2(b) - y_1(b)\, y_2(t)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt +$$

$$\beta_2 \int_a^b \frac{y_1(t)\, y_2'(b) - y_2'(b)\, y_2(t)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt + 0$$

$$= \int_a^b \frac{B_2(y_2(b))\, y_1(t) - B_2(y_1(b))\, y_2(t)}{p(t)\, W(t)}\, f(t)\, dt$$

للحصول على صيغة بسيطـــة نختار $y_1(x)$ حـل (غير تافـه) للمعادلـة
$Ly = 0$ (الغير مقيدة بشروط حدية) يحقق الشرط

$$B_1\,(y_1(a)) = 0 = \alpha_1\, y_1(a) + \beta_1\, y_1'(a)$$

بينما نختار y_2 حل مستقل آخر يحقق الشرط الحدى $B_2\,(y_2(b)) = 0$
فى هذه الحالة تختزل المعادلات(24) إلى

$$c_2\, B_1\,(y_2(a)) = 0$$

$$c_1\, B_2\,(y_1(b)) + B_2\,(y_p(b)) = 0 \qquad (28)$$

حيث أن $B_1\, y_2\,(a) \neq 0$ وإلا كان y_2 حلا غير تافه للمعادلة

$$Ly = 0 \quad , \quad B_1(y) = 0 = B_2(y)$$

من ثم $c_2 = 0$ وعليه

$$c_1 = -\,\frac{B_2\, y_p\,(b)}{B_2\, y_1\,(b)} = \int_a^b \frac{y_2\,(t)\, f(t)}{p(t)\, W(t)}\, dt \qquad (29)$$

حيث إســتخدمنا (27) والحقيقــة $B_2\,(y_2\,(b)) = 0$ .. نلاحـــظ أيضــا
أن $B_2\,(y_1\,(b)) \neq 0$ من ثم فإن حل (21) هو

$$y = c_1 y_1(x) + y_p = \int_a^b \frac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt$$

$$+ \int_a^b \frac{y_1(t)\, y_2(x) - y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt \qquad (30)$$

بتجزئ التكامل الأول إلى جزئين

$$y = \int_a^b \frac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt + \int_x^b \frac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt$$

$$+ \int_a^x \frac{y_1(t)\, y_2(x) - y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt \qquad (31)$$

$$i.e. \quad y = \int_x^b \frac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt +$$

$$+ \int_a^x \frac{y_1(t)\, y_2(x)}{p(t)\, W(t)} f(t)\, dt \qquad (32)$$

تعرف دالة جرين (Green's function) للمسألة الحدية بالنظرية السابقة كالآتي:

$$g(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} & x \le t \\ \dfrac{y_1(t)\, y_2(x)}{p(t)\, W(t)} & t \le x \end{cases}$$

بحيث يمكن كتابة (32) كالآتى:

$$y(x) = \int_a^b g(x, t)\, f(t)\, dt \qquad (34)$$

بوجه عام أى دالة $g(x, t)$ لها الخاصية أن حلى المعادلة الغير متجانسة يمكن التعبير عنه على هيئة تكامل كالوارد فى (34) تسمى دالة جرين.

مثال ٧:

لإيجاد دالة جرين للمعادلة غير المتجانسة

$$y'' = f(x) \qquad y(0) = y(1) = 0$$

نرى أن للمعادلة المتجانسة $y'' = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ الحل الصفرى فقط.باعتبار $y_1 = x$, $y_2 = x-1$ وحيث أن

$$p(x)\, W(x) = 1\,[x \cdot 1 - (x-1) \cdot 1] = 1$$

من ثم

$$g(x, t) = \begin{cases} x(t-1) & x \le t \\ t(x-1) & t \le x \end{cases}$$

ويكون الحل مساويا

$$y(x) = \int_0^1 g(x, t)\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^x t(x-1)\, f(t)\, dt + \int_x^1 x(t-1)\, f(t)\, dt$$

مثال ٨:

لإيجاد دالة جرين للمسألة الحدية

$$y'' - y = f(x) \qquad y(\pm\infty) = 0$$

نرى أن حل المعادلة المتجانسة

$$y'' - y = 0 \qquad y(\pm\infty) = 0$$

هو الحل التافه. بإعتبار $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{+x}$ وحيث أن

$$p(x)\ W(x) = 2$$

من ثم

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{t} e^{-x} = \frac{1}{2} e^{t-x} & x \le t \\ \frac{1}{2} e^{-1} e^{x} = \frac{1}{2} e^{x-t} & t \le x \end{cases}$$

$$i.e. \quad g(x, t) = \frac{1}{2} e^{-|x-t|}$$

ويكون حل المسألة الحدية هو

$$y = \frac{1}{2} \int_{-x}^{x} e^{-|x-t|} f(t)\, dt$$

سوف ندرس حل المسألة الحدية (21) عندما يكون للمعادلة المتجانسة حل غير تافه. نفرض أن $y_1(x)$ هو هذا الحل. الحل العام فى هذه الحالة هو $c\,y_1(x)$. الحل $y_1(x)$ يحقق الشرطين

الحديين $B_2 y_1(b) = 0$ ، $B_1(y_1(a))$ وتؤول المعادلات (4) إلى

$$c_2 B_1 y_2(a) = 0$$

$$c_2 b_2 y_2(b) + B_2 y_p(b) = 0 \qquad (35)$$

حيث أن y_2 ، y_1 مستقلتان خطيا وكذلك $B_1(y_2(a)) \neq 0$ بالتالي $c_2 = 0$ وعليه يوجد للشروط (35) وبالتالي للمسألة (21) حل إذا كان $B_2 y_p(b) = 0$. بإستخدام الصيغة (27) وأن $B_2 y_1(b) = 0$ نحصل على

$$B_2 y_p(b) = B_2 y_2(b) \int_a^b \frac{y_1(t)\ f(t)}{p(t)\ W(t)}\ dt = 0 \qquad (36)$$

مما سبق نستخلص الآتي:

يوجد حل للمسألة الحدية $Ly = f,\ B_1(y(a)) = B_2 y(b) = 0$ إذا وفقط وإذا تحققت (36). إذا كان المؤثر مرافق ذاتي كانت p(t) W(t) مقدارا ثابتا وعليه يوجد حل لمسألة المؤثر المرافق الذاتي $Ly = f,\ B_1 y(a) = B_2 y(b) = 0$ إذا وفقط إذا حققت f التكامل

$$\int_a^b f(t)\ y_1(t)\ dt = 0 \qquad (37)$$

لإيجاد صيغة صريحة للحل عندما تتحقق (36) نرى أن في حل (24) يكون $c_2 = 0$ بينما c_1 إختياري بحيث يمكن كتابة الحل العام للمسألة الحدية بالهيئة

$$y = c_1 y_1(x) + y_p =$$

$$= c_1 y_1(x) + \int_a^x \frac{y_1(t)\, y_2(x) - y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} \quad f(t)\, dt$$

$$= c_1 y_1(x) + \int_x^b \frac{y_1(x)\, y_2(t)}{p(t)\, W(t)} \quad f(t)\, dt \tag{38}$$

$$+ \int_a^x \frac{y_1(t)\, y_2(x) - y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} \quad f(t)\, dt \tag{39}$$

حيث أدخل فـى (39) حـدا علـى هيئـة $y_1(x)$ مضروبـا فـى ثـابت (الحـد الأوسط). بإجراء نفس خطوات الحصول على المعادلـة (34) نحصـل علـى الحل

$$y = c_1 y_1(x) + \int_a^b g(x, t)\, f(t)\, dt \tag{40}$$

حيث تعطى دالة جرين من

$$g(x, t) = \begin{cases} \dfrac{y_2(t)\, y_1(x)}{p(t)\, W(t)} & x \le t \\ \\ \dfrac{y_1(t)\, y_2(x)}{p(t)\, W(t)} & x \ge t \end{cases}$$

حيث $y_1(x)$ هو حل غير تافه للمعادلة المتجانسة بينما y_2 هو حل مستقل للمعادلة $Ly = 0$.

مثال ٩:

لحل المعادلة

$$y'' = f(x) \;,\; y(0) = 0 \;,\; y(1) - y'(1) = 0$$

نرى أن لمواكبتها المتجانسة حل غير تافه $y_1 = x$. يمكن إعتبار $y_2 = 1$ بالتالى

$$pW(y_1, y_2) = 1 \, . \, (x \, . \, 0 - 1 \, . \, 1) = -1$$

من ثم

$$g(x, t) = \begin{cases} -x & x \le t \\ -t & t \ge x \end{cases}$$

ويكون الحل مساويا

$$y = c_1 x + \int_0^1 g(x, t) \, f(t) \, dt =$$

$$= c_1 x + \int_0^x (-t) \, f(t) \, dt + \int_x^1 (-x) \, f(t) \, dt$$

بشرط أن ينعدم التكامل

$$\int_0^1 x f(x) \, dx = 0$$

تمارين

١ - أوجد الحلول إن وجدت لمسائل القيم الحدية

a) $y'' + 9y = x \qquad y(0) = 0 \, , \, y(\pi) = 0$

b) $y'' + 9y = \sin x \qquad y(0) = 0 \, , \, y(\pi) = 1$

c) $y'' + 9y = \sin x \qquad y(0) = 1 \, , \, y(\pi) = -1$

٢ - إثبت أن للمعادلة $y'' + \pi^2 y = f(x) \, , \, y(0) = y(1) = 0$
حل إذا وفقط إذا كان $\int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx = 0$ وعند وجود
الحل إثبت أنه يعطى من

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x f(t) \sin \pi (x - t) \, dt + c \sin \pi x$$

٣ - أوجد القيم المميزة للمسألة الحدية

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y'(0) = y'(a) = 0$$

٤ - إذا كانت $\{\lambda_i\}$ قيما مميزة للمؤثر L دوالها المميزة $\{y_i\}$ إثبت أن حل
المعادلة

$$Ly + \lambda y = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i$$

يعطى من

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i y_i}{\lambda - \lambda_i}$$

حيث λ - ليس قيمة مميزة.

٥ – حل

$$y'' + \lambda y = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin k\pi x \quad y(0) = y(1) = 0 \quad , \quad \lambda \neq k^2 \pi^2$$

٦ – إثبت أن كثيرات حدود تشبيشف (Tcheyysheff) المعرفة كالآتى

$$T_0(x) = 1 \, , \, T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\,(n \cos^{-1} x) \quad n = 1, 2, \ldots$$

متعامدة فى الفترة $-1 \leq x \leq 1$ بالنسبة لدالة الوزن $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$.

٧ – إثبت أن مجموعة الدوال مركبة القيم

$\{e^{inx}\}\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

تكون مجموعة متعامدة فى الفترة $0 \leq x \leq 2\pi$ بإستخدام حاصل الضرب الداخلى المركب.

٨ – إذا كان $L = D(p(x)D) + q(x)$ مؤثر مرافق ذاتى بينما $u \, , \, v$ قابلتان للإشتقاق حتى الرتبة الثانية. إثبت متطابقة لاجرانج

$$\int_{x_0}^{x_1} [u L(v) - v L(u)]\, dx = [p(x)\,(u v' - v u')]_{x_0}^{x_1}$$

٩ – إثبت أن المؤثر $L = a_0(x)\, D^2 + a_1(x)\, D + a_2(x)$ يكون مؤثر مرافق ذاتى إذا كان

١٠ – إذا لم يكن L مرافقا ذاتيا إثبت أنه يمكن تحويله إلى مؤثرا مرافقا ذاتيا بضربه فى

$$e^{\int [a_1(x)/a_0(x)]\, dx}$$

١١ – أكتب المعادلات الأتية فى صيغة ترافقها الذاتى

a) $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)\, y = 0$

b) $(1-x^2)\,y'' - 2xy'' + n(n+1)\,y = 0$

١٢ – أوجد مفكوك فورير ذو الدورة 2π للدوال الدورية المعرفة فى الدورة الآتية:

a) $f(x) = |\cos x| \qquad -\pi < x < \pi$

b) $f(x) = 2 - 3\cos x + 7\sin 5x$

١٣ – أوجد مفكوك فورير للدالة

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < \pi/2$$

$$= 0 \qquad (\pi/2) < x < \pi$$

أ – في متسلسلة جيوب تمام ودورة 2π

ب – في متسلسلة جيوب ودورة 2π

جـ – متسلسلة فورير عامة ودورة π

١٤ – أوجد دالة جرين لكل مسألة حدية آتية

a) $y'' = f \qquad y(-1) = 0 \quad y(1) = 0$

b) $y'' + 4y = f \qquad y(0) = y'(1) = 0$

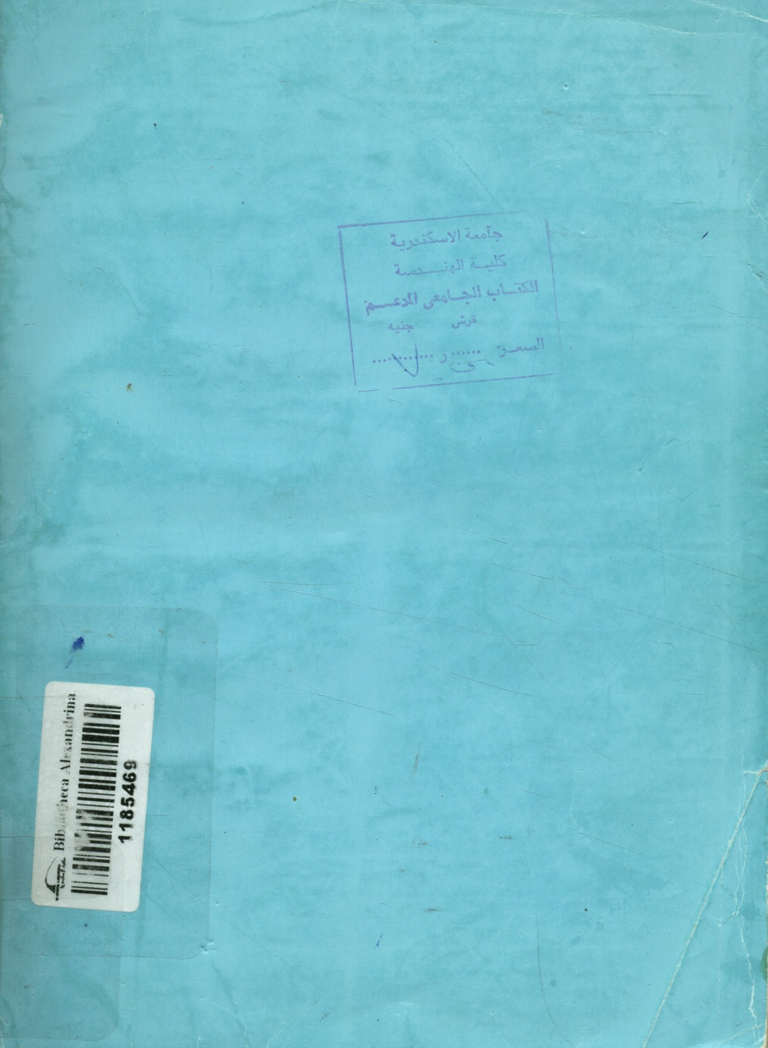
c) $y'' + \lambda^2 y = f \qquad y(0) = y(1) = 0 \;\; \lambda \neq eigenvalue$

١٥ – أوجد حل المعادلات

a) $y'' + \pi^2 y = f \qquad y(0) = y(1) = 0$

b) $y'' + \lambda_n^2 y = f \qquad y(0) = y(1) = 0\,,\; \lambda_n = n\pi$

حيث n عدد صحيح موجب



جامعة الاسكندرية
كلية الهندسة
الكتاب الجامعي المدعم
قرش جنيه
السعر
Bibliotheca Alexandrina
1185469